

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

SZOBORSZERŰ FELÜLETEK TERVEZÉSE ÉS
MEGMUNKÁLÁSA

Irták:

GAÁL BALÁZS

HERMANN GYULA

HORVÁTH LÁSZLÓ

RENNER GÁBOR

VÁRADY TAMÁS

Szerkesztette:

RENNER GÁBOR

Tanulmányok 88/1978.

A kiadásért felelős:

DR VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 075 0

ISSN 0324-2951

TARTALOMJEGYZÉK



<u>BEVEZETÉS</u>	5
<u>1. fejezet</u> SZOBORSZERŰ FELÜLETEK AZ IPARBAN.....	7
- Hermann Gyula, Horváth László -	
1.1 Szoborszerű felületek megadásának szokásos módszerei	7
1.2 Szoborszerű felületek megmunkálása	13
<u>2. fejezet</u> MATEMATIKAI MÓDSZEREK SZOBORSZERŰ FELÜLETEK LEÍRÁSÁRA - Renner Gábor -	19
2.1 Általános szempontok	19
2.2 Görbék interpolációja, approximációja	21
2.3 Matematikai módszerek felületek leírására	46
2.4 Geometriai számítások felületekkel	68
<u>3. fejezet</u> SZOBORSZERŰ FELÜLETEK MEGJELENÍTÉSÉNEK ÁLTALÁNOS ELVEI - Gaál Balázs, Várady Tamás -	81
3.1 Felületek ábrázolásának módjai	82
3.2 Felületek megjelenítése 2D-ben	85
<u>4. fejezet</u> TECHNOLÓGIAI KRÉDÉSEK SZOBORSZERŰ FELÜLETEK MEGMUNKÁLÁSÁNÁL - Horváth László -	89
4.1 Technológiai tervezés általános szempontjai	89
4.2 Megmunkálás pontosságának vizsgálata	93
4.3 Mozgásstratégia meghatározása	95
4.4 Szerszámválasztás	104
4.5 Forgácsolómozgás meghatározása	106
4.6 Technológiai adatok meghatározása	108
4.7 A szerszám teljes mozgáspályájának meghatározása ...	109
<u>5. fejezet</u> SZOBORSZERŰ FELÜLETEK TERVEZÉSÉNEK, MEGMUNKÁLÁSÁNAK RENDSZERTERVE	111
5.1 Általános elképzelések - Hermann Gyula -	111
5.2 Felületleírás, dekódolás - Hermann Gyula, Renner Gábor-	115

5.2 Felületleírás, dekódolás	115
- Hermann Gyula, Renner Gábor -	
5.3 Megjelenítés	122
- Gaál Balázs, Várady Tamás -	
5.4 Geometriai számítások . - Renner Gábor -	127
5.5 Technológia tervezés - Horváth László -	131

BEVEZETÉS

A számítógéptechnika utóbbi évtizedben bekövetkezett nagyarányú fejlődése és elterjedése új lehetőségeket tárt fel a megmunkálási technológiák előtt is. E technológiák fejlődése elsősorban a számjegyvezérlésű (NC) megmunkálógépek megjelenésében mutatkozott. E vezérlési mód lehetővé tette a szerszám tetszőleges térbeli pályán történő mozgatását, aminek eredményeképpen olyan bonyolult térbeli "szoborszerű" felületek is megmunkálhatókká váltak, amelyeket a hagyományos technológiákkal egyáltalán nem, vagy csak nehezen lehetett megmunkálni. Ilyen felületeket tartalmaznak például vizgépek, szellőzőberendezések turbinalapátjai, sajtoló és kovácsolószerszámok, járművek burkolófelületei. E bonyolult geometriájú felületek köre a jövőben még jelentősen bővülni is fog. A tervezési módszerek fejlődése következtében ugyanis egyre jobban meg tudjuk közelíteni az alkatrészek szilárdsági, anyagfelhasználási (anyagtakarékosági), megmunkálási, esztétikai szempontok szerinti optimális alakját.

A tervezési módszerek fejlődését is nem utolsó sorban a számítástechnikai módszerek és eszközök fejlődése tette lehetővé. Olyan matematikai módszereket dolgoztak ki, illetve fejlesztenek jelenleg is, amelyek lehetővé teszik a fenti igen általános felületek tetszőleges pontossággal való leírását és számítógépen való reprezentálását. Az időközben kidolgozott megjelenítő eszközök (grafikus display) segítségével pedig e felületeket vizuálisan is kiértékelhetjük még a tervezés stádiumában.

A számítógépek alkalmazása lehetővé tette olyan fizikai modellek alkotását és ezek numerikus kiértékelését, amelyek a vizsgált folyamatot (folyadékáramlás, hőáramlás, mechanikai feszültségeloszlás, deformáció) az eddigieknél sokkal pontosabban írják le, sőt bizonyos esetekben az anyag viselkedését is a valóságot jól megközelítően veszik figyelembe (pl. inhomogenitás, nemlinearitás). Mindezek felhasználásával, valamint kihasználva azt a lehetőséget, hogy a tervezésben gyakran előforduló iteratív eljárások számító-

gépen szintén könnyen megvalósíthatók, a tervezési folyamatot magasabb szinten, (hatékonyabban, kevesebb tervezői időráfordítással) lehet elvégezni, és az optimálishoz közel álló tervet lehet kidolgozni.

Az NC gépek elterjedése új lehetőségeket teremt a "szoborszerű" felületekkel rendelkező alkatrészek gyártásának automatizálása területén is. A numerikus vezérlésű szerszámgépek számítógépes irányításával - amelyet itt különösen indokolnak a bonyolult szerszámmozgások és változó technológiai körülmények - megteremtődik annak a lehetősége, hogy a megmunkálási folyamatot és a termelés-irányítás információs folyamatát közvetlenül összekapcsoljuk. Ily módon a szoborszerű felületek megmunkálását megvalósíthatjuk a jelenleg legmodernebb gyártási rendszerek; integrált gyártó-rendszer, gyártócellák keretében.

A fenti tervezési és megmunkálási lehetőségek széleskörű elterjedése várhatóan átalakítja a jelenlegi tervezői szemléletet is. Szoborszerű felületek alkalmazására sor kerülhet olyan területeken is, ahol a hagyományos szemlélet és a meglévő technikai korlátok miatt egyszerű felületek (sik, kup henger stb.) alkalmazása vált általánossá, bár a különböző követelmények szoborszerű felületek kialakítását indokolják.

Jelen tanulmányunkban összefoglaljuk a szoborszerű felületek tervezésének és megmunkálásának legfontosabb kérdéseit. Tárgyaljuk ezen felületek matematikái leírására, valamint a megmunkálás szempontjából fontos felületjellemzők (normális, metszet, burkolófelület stb.) számítására szolgáló módszereket. Foglalkozunk a grafikus eszközökön való megjelenítés és interaktív tervezés kérdéseivel és megvizsgáljuk az NC megmunkálás technológiai szempontjait. Végül kidolgozzuk a szoborszerű felületek tervezésének és megmunkálásának rendszertervét, amely moduláris felépítésénél fogva lehetőséget ad a rendszer fokozatos megvalósítására. Egy működő rendszer létrehozása természetesen sok előkísérletet és tapasztalatot igényel, amelyeket leginkább a folyamatosan megvalósuló rendszeren kell, illetve lehet megszervezni.

1. SZOBORSZERŰ FELÜLETEK AZ IPARBAN

1.1 Szoborszerű felületek megadásának szokásos módszerei

Szoborszerű felületek megadási módjainak vizsgálatához az iparban jelenleg gyártott szoborszerű alkatrészek dokumentációjából indultunk ki. Néhány üzemtől rajzokat szereztünk be és ezeket a rajzokat az alak és a méretezés szempontjából elemeztük.

Szoborszerű felületek ipari alkalmazását indokolhatja az alkatrész funkciója és/vagy a vele szemben támasztott esztétikai követelmények. Az előbbire jó példák az egyenszilárd-ságura méretezett alkatrészek, különböző vizgépek elemei: járókerekek, turbinák, hajócsavarok és a különböző kovácsló, prés-és huzószerszámok, ahol a velük megmunkálendő anyagok tulajdonságai követelik meg a bonyolultabb lekerekítések, profilok stb. kialakítását. Esztétikai követelmények érvényesülnek a különböző alaku palackoknál, gépkocsi karosszériáknál stb. A fent említett rajzok vizsgálatából az alábbi megállapításokra jutottunk:

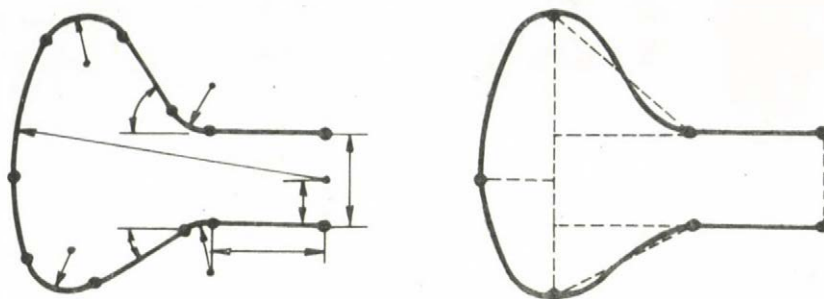
- 1.) A kizárólag szoborszerű felületelemekkel határolt test igen ritka, szoborszerű felületelemek általában henger és sík felületekkel kapcsolódva fordulnak elő. Ennek oka egyrészt abban rejlik, hogy a szoborszerű felületek megmunkálása munkaigényes (költséges és hosszadalmas) ezért a konstruktőrök arra törekednek, hogy csak ott alkalmazzák azokat, ahol feltétlenül szükségesek. Másrészt sok

esetben konstrukciós szempontok is indokolják egyszerű felületek (henger, sík) alkalmazását. A szoborszerű felületek leírására szolgáló matematikai modellel szemben támasztott egyik fő követelmény tehát az, hogy szoborfelületekből és egyszerű geometriai felületekből összeállított testeket könnyen le lehessen vele írni. Megjegyezzük, hogy a két különböző típusú felületelem határát kijelölő görbe egyes esetekben egyszerűen megadható, más esetekben bonyolult áthatási görbe.

- 2.) A gépészetben előforduló legtöbb alkatrésznel a felület ill. a felületre írt görbék görbülete nem folytonos. Mivel az első derivált folytonossága két felületelem sima csatlakozását már biztosítja, a második derivált folytonossága általában nem szükséges. Jó példa erre a munkadarabokon oly gyakran előforduló lekerekítés, amely a műhelyrajzon egy egyenes szakasz és egy körív csatlakozásaként jelenik meg. A csatlakozási pontban a görbület nem folytonos. Ennek ellentmondó követelmény, hogy a felületelemen nagyobb fokú simaságra és ezáltal a második derivált folytonosságára is szükség lehet. Nem célszerű azonban kettőnél magasabb rendű deriváltak folytonosságát kikötni, mivel ez a matematikai modellben magasabb fokszámú polinomok alkalmazásához vezet. Ez pedig a felület nem kívánt hullámosodását idézheti elő.
- 3.) A rajzokon megfigyelhető az a törekvés, hogy még a bonyolultabb felületelemeket is egyenes szakaszokkal és körívvel írják le. Ez befolyásolja a konstrukciót és nem kívánt, az optimálistól eltérő eredményekhez vezet. Különösen szembetűnő ez a jelenség olyan munkadarabok műhelyrajzainál, ahol a felületelemeket a műszaki követelményeknek megfelelően valamilyen bonyolultabb, szoborszerű felülettel kellene egymáshoz csatlakoztatni, de a darab többé-kevésbé megrajzolható körzővel és vonalzóval is. A konstruktőr ilyen esetekben szinte pszichológiai kényszert érez, hogy a feladatot az említett

módon oldja meg. Magasabb fokszámu görbék és az új matematikai módszerek alkalmazása a konstrukció jelentős minőségi javulásához vezethet.

Nézzük a következő példát: (1. ábra)

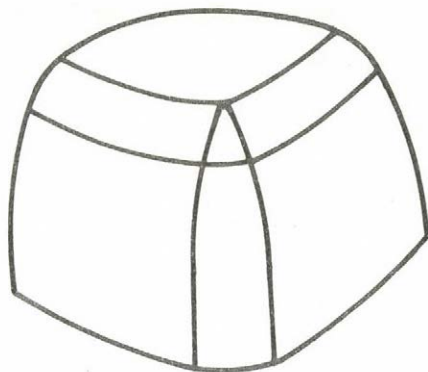


1. ábra.

Az ábrán egy szivattyu metszetét látjuk.

A baloldali rajzon a méreteket konvencionális módon adták meg. Ez tizenegy pont meghatározását teszi szükségessé, amelyek közül néhány nehezen számítható ki. Ezzel szemben a jobb oldali rajzon mindössze hét pont szükséges egy nagyon hasonló alakzat leírásához. Ez a metszet könnyen meghatározható, mivel két ellipszis negyedből, két s alakú görbeszegmensből és a hozzájuk csatlakozó egyenes szakaszokból áll.

- 4.) A felületek szoborszerű részei általában jól felépíthetők négyszögszerű felületelemekből. Azonban mint az a következő példából is kitűnik, előfordulnak olyan esetek is, amikor kézenfekvőbb részben háromszögszerű felületelemek alkalmazása (2. ábra).



2. ábra.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a kétféle felületelem együttes használata, illetve összekapcsolása matematikai szempontból jelenleg nehézséget okoz.

A megvizsgált rajzok alapján a felületeket négy nagy csoportba soroltuk:

a.) általános szoborfelületek

Az ilyen típusu felületek teljes egészében, vagy tulnyomórészt szoborfelületekből állnak, amelyek egyéb felületekhez egyáltalán nem, vagy csak egy-két helyen kapcsolódnak. A felület megadása a felületet definiáló térbeli pontok halmazával történik. Példaként szolgálnak e felületekre a formatervezett használati tárgyak prösszerszámai, autókárosszéeriák stb.

b.) metszetekkel definiált szoborszerű felületek

E felületek is tulnyomórészt szoborszerűek, azonban alakjuk jellegzetessége, illetve a tervezési gyakorlatban meghonosodott módszerek következtében e felületeket sík, henger - vagy kupfelülettel képzett metszeteikkel definiálják. A metszetek megadásán kívül természetesen szükség van a metszetek térbeli elhelyezkedését definiáló görbe az u.n. gerincgörbe megadására is. A felület lehet nyílt vagy zárt: az első esetben a metszetek sem zárt görbék.

Jellegzetes képviselői e felületeknek az áramlás-technikai szempontok szerint kialakított felületek: hajótestek, repülőgépfelületek, turbinalapátok, járókerekek. Az utóbbiak különleges jellegzetessége, hogy egy adott tengely körül meghatározott számú azonos kialakítású szoborszerű felület helyezkedik el szabályos elrendezésben.

c.) tulnyomórészt hagyományos felületelemekből álló felületek

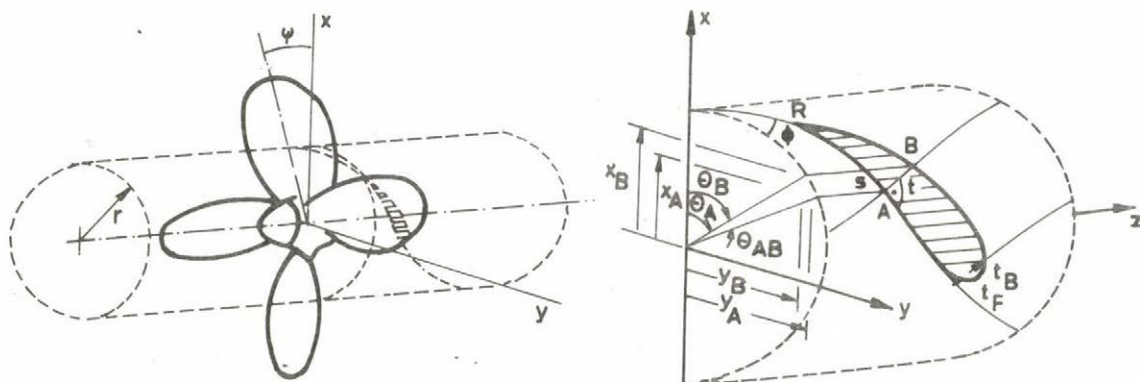
Az ilyen felületek tulnyomórészt egyszerű, hagyományos felületekből állnak (sík, henger, kup, gömb) és a szoborszerű felületelemek csupán ezek összekapcsolásánál fordulnak elő. E kialakítás megköveteli a szoborfelület és az egyszerű felületek csatlakozásának pontos definiálását. Jó példák e felületekre a süllyesztékek, ill. présszerszám jellegű munkadarabok, ahol a szoborszerű felületek használata lehetőséget ad az egyszerű felületek technológiai szempontból (pl. képlékeny alakítás) optimális összekapcsolására.

d.) forgásfelületek

A forgásfelületeket általában a forgástengelyen átmenő síkban fekvő görbével és a forgástengellyel határozzák meg. E felületek rendszerint nem csatlakoznak más felületekhez, vagy ha igen, akkor a csatlakozással szemben támasztott követelmények általában nem szigorúak. Számtalan, a mindennapi életben előforduló használati tárgy felülete tartozik e kategóriába, pl. palackok, burák stb.

Tekintsünk át ezek után néhány jellemző példát.

Egy jobb emelkedésű hajócsavar megadási módját tanulmányozhatjuk a 3. ábrán:



3. ábra

A lapátok egy hengerfelületre irt csavarvonal mentén helyezkednek el.

Egyes speciális esetekben a csavarvonalat kupra írják. A lapátok állásszögét a csavarvonal menetemelkedése adja, amely a henger átmérőjének függvénye, alakját pedig a henger palástja által kihasított metszetek határozzák meg. A metszet egy tetszőleges P pontját a csavarvonal mentén egy referencia ponttól mért távolság (RA), valamint a lapátnak erre a csavarvonalra merőlegesen vett és a hengerfelület mentén mért vastagsága (t) adja. Megjegyezzük, hogy azok a vonalak amelyek

mentén a vastagságot mérjük, szintén csavarvonalak az előbbi henger palástján. E megadási módtól némiképp eltérő megadást látunk az 1. mellékleten, ahol a hajócsavar metszetének alsó ívét a tengelyre merőleges siktól (+ -) adott távolságra (h) levő pontok határozzák meg. A süllyeszték és présszám jellegű munkadarabokat a 2. és 3. mellékleteken szereplő rajzokkal illusztráljuk. A süllyesztékek üregeinek fő méreteit a készítendő darab határozza meg. A szerszámmal megmunkálható anyag folyási tulajdonságai, valamint a forma jobb kitöltése több helyen lekerekítéseket, sima felületeket követel meg. Ezeket az egyszerűség kedvéért általában körív alaku lekerekítésként adják meg, holott ezt a szerszám funkciója nem indokolja, sőt képlékeny alakításnál az anyag folyásirányával egy síkban lévő metszetekben más kialakítás sokkal előnyösebb lehet. Forgásfelületeknél alapvetően két esetet különböztetünk meg. Ha a megmunkálás esztergagépen történik, ahol a kés síkban mozog, elegendő csak a konturgörbét előállítani megfelelő matematikai módszerrel. Abban az esetben viszont, ha a forgásfelület "negatívjának" előállítása a cél (pl. kokilla, süllyeszték), akkor a konturgörbe megforgatásával előálló teljes felület matematikai reprezentációjára szükség van.

1.2 Szoborszerű felületek megmunkálása

A szoborszerű felületek tervezésének eredménye valamely, a munkadarab felületét, anyagát stb. leíró dokumentációban jelenik meg. A munkadarab előállítása történhet hagyományos technológiával, vagy NC (számjegyvezérlésű) szerszámgéppel. Mindkét esetben elő kell állítani a megmunkálás információhordozóját, el kell juttatni a megmunkálás helyére és végre kell hajtani a megmunkálást, de a két módszernél ez lényegesen eltérő módon megy végbe.

Hagyományos megmunkálások általában a másolás valamilyen módját alkalmazzák, ahol az információhordozó a kész munkadarab alakjából és a megmunkáláskor alkalmazott áttételekből meghatározható u.n. minta, vagy mesterdarab.

A minta elkészítésekor a tervdokumentáció numerikus információiból egy tárgyat állítunk elő, amely megtestesíti a kész munkadarabra vonatkozó információk jelentős részét. A minta anyagát, gyártástechnológiáját az elkészítendő munkadarab megkívánt minősége alapján kell meghatározni, mivel a minta a megmunkálás kiindulásaként meghatározza a kész munkadarab minőségét (azaz nem lehet a mintánál pontosabb munkadarabot előállítani). A minta felületének síkmetszeteit is csak olyan általános (paraméteres) görbékkel lehet leírni, amelyek megmunkálása hagyományos gépekkel nem lehetséges.

Fa vagy könnyen megmunkálható műanyag készítésénél először meghatározzuk - a felület meredekségének megfelelő osztással - a térbeli munkadarabok síkmetszeteit és előállítjuk az ezeknek megfelelő síklapokat. Ez a térgörbék előrajzolása után - amelyet pl. a görbék számított pontjain átfektetett speciális, hajlékony görbevonalzókkal végeznek - a síkmetszet közelítő kivágásával, majd az előrajzolt görbének megfelelően kézi megmunkálással történik. A térbeli minta elkészítése ezeknek a metszeteknek pontos összeállításával és a metszetekre merőleges irányban történő összezsírozással állítható elő. Utolsó lépésként a minta felületét gondosan kikészítik.

Fa vagy műanyag mintákat korlátozott pontosságuk, merevségük, keménységük miatt általában csak öntőformák előállításához, vagy viszonylag kis pontosságú munkadarabok egy-két darabos másolásához használják.

Nagyobb darabszámú munkadarab pontos megmunkálását másoló marógéppel szokták végezni, ahol a deformáció és a kopás csökkentése érdekében a mintát fémből készítik. A minta előállításának első lépéseként a minta elegendően sok metszeté-

ről valamely jól alakítható anyagból pontos sablonokat készítenek. Az előnagyzott mintát másolómarógépen munkálják meg úgy, hogy mindig cserélik a sablonokat. A minta felülete a megmunkálás után teraszos lesz - a metszetek számától függően kisebb-nagyobb lépcsőkkel - amelyet kéziszerszámokkal először elsimitanak, majd a minta felületét a megkívánt pontosságnak megfelelően finomra munkálják.

A minták elkészítésekor sok kézi megmunkálásra és mérésre van szükség, amihez jó szakmunkás és igen sok idő szükséges, ami a minta megkívánt pontosságának növekedésével jelentősen nő. Az alkalmazott megmunkálási módszerek azonban nem teszik lehetővé - a megmunkálási idő és ennek következtében a költség tetszőleges növelése mellett sem - a minta gyártási pontosságának tetszőleges növelését. Ez behatárolja a munkadarab elkészítési pontosságát is, amelyet a másolóberendezés bármilyen fejlesztésével sem léphetünk túl.

Az információ átvitele hagyományos megmunkálásoknál a mintának a megmunkálás helyére történő szállításaként jelentkezik. A szállítást gondosan kell végezni, különösen nagyobb távolságoknál, mivel a minta sérülése nehezen vagy egyáltalán nem javítható.

A megmunkálás során a minta alakjában tárolt geometriai információkat használjuk fel úgy, hogy a minta felületének megfelelő pontjait a másolás áttételének megfelelően leképezzük a munkadarab felületére.

A másolásnál az áttétel az egyes megmunkálási típusoknak megfelelően más és más lehet.

Ha a munkadarabot öntéssel munkáljuk meg, akkor a minta felülete közvetlen érintkezéssel alakítja ki a formát, azaz áttétel nélkül határozza meg az alkatrész felületét. A kész munkadarab pontosságát az öntési eljárás szabja meg.

Szoborszerű munkadarabok forgácsoló megmunkálása általában másolómarással történik, esetleg gyalulással, ha a munkadarab felületét valamely irányban párhuzamos egyenesek határolják. A másolómarásnál a mintát egy meghatározott helyre fel fogják, és a másolóberendezés tapintóját végigvezetik a felületen.

A megmunkálás geometriai információit a tapintó pillanatnyi helyzete és a másolóberendezés belső áttétele szabja meg. A különböző mechanikus (pantográf) vagy hidraulikus másolóberendezések áttétele általában lineáris, azaz a tapintó egy meghatározott pontjának elmozdulása a szerszám egy meghatározott pontjának arányos elmozdulását eredményezi.

Technológiai korlátozást jelent, hogy a másolóeljárás nem teszi lehetővé megmunkálás közben a technológiai adatok változó forgácsolási körülményeknek megfelelő változtatását, a több fogásban történő megmunkálás csak nehézkesen, a szerszámtól eltérő méretű tapintóval vagy a számrendszer elállítással oldható meg, amely egyes esetekben geometriai problémákat okozhat.

Az elkészült munkadarab pontossága a másolás sűrűségétől a másolóberendezés pontatlanságától és időkésésétől, nagyobb sorozatoknál a fellépő kopások mértékétől stb. függ.

Egyes nagy sorozatban készülő egyszerű szoborszerű munkadarabok (pl. turbinalapátok, fogaskerekek) gyártása megoldható célgépekkel is. Ebben az esetben mintát nem, vagy csak egészen egyszerűt (sik, forgattyú) alkalmaznak. Elmarad a mintakészítés hosszú és drága folyamata, a munkadarab felületének megmunkálását a célgépbe beépített mechanizmus biztosítja. A másolás szempontjából ez a másolómozgásnak valamilyen nem lineáris áttételét jelenti. Az ilyen berendezés alkalmazása az adott munkadarabok gyártása szempontjából sokkal kedvezőbb lehet, mint az eddig tárgyalt eljárások, hátránya viszont, hogy az adott célgépet semmilyen más típusú felület megmunkálására nem lehet felhasználni.

Szükség lehet a különböző megmunkálások után a munkadarab felületi finomságának javítására. Ezeket a műveleteket (köszörülés, csiszolás, hántolás, polirozás stb.) jó szakmunkások kéziszerszámokkal végzik, melyek így a munkadarab árát és elkészítési idejét jelentősen megnövelhetik.

Az NC megmunkálás tervezéséhez és vezérléséhez számítógép szükséges, amely elég drága berendezés, viszont a szoborszerű felületek forgácsoló megmunkálásához lényegesen kedvezőbb körülményeket lehet biztosítani általa.

A hagyományos megmunkálások tárgyalásánál láttuk, hogy első lépésként a mintát kell előállítanunk. A minta az értelmezés szerint egy meghatározott formájú adattömeg, melynek feladata a megmunkálás vezérlése. Az NC megmunkálásnál ezt a feladatot az alkatrészprogram látja el. Az alkatrészprogram előállítására szolgáló tervezőrendszer egyes kérdéseit a későbbiekben részletesen tárgyaljuk, így itt csak a hagyományos mintával történő összehasonlításra szorítkozunk.

Az alkatrészprogram:

- viszonylag rövid idő, néhány óra alatt elkészülhet, és az elkészülési idő nem függ lényegesen a munkadarab méretétől,
- a geometriai leírás elvileg tetszőlegesen pontos lehet,
- a geometriai adatok mellett tartalmazhatja az összes technológiai és kiszolgáló műveletekhez szükséges adatot, ami a megmunkálást automatizálhatóvá teszi,
- lehetővé teszi a technológiai adatoknak a megmunkálási körülmények változásának megfelelő folyamatos módosítását,
- tervezésekor lehetővé válik a megmunkálás meghatározott szempontokra történő optimalizálása,
- segítségével könnyen - a tervezőrendszer megfelelő programmoduljának módosításával - bevezethetők a megmunkálásba a legújabb geometriai és technológiai módszerek,

- tetszés szerinti darabszámban előállítható és így valamelyik sérülésekor, vagy az információhordozó (pl.lyukszalag)elhasználódásakor gyorsan cserélhető,
- információ tartalma nem változik ("kopik") a használat során

Az alkatrészprogram elkészülte után az információ-hordozót továbbítani kell az NC gép vezérlőegységéhez. A szállítás egyszerűbb, mint a hagyományos mintáknál, mivel az információ-hordozó alakja nem függ a konkrét munkadarabtól, viszonylag kis helyen elfér és így a továbbítására jól fel lehet készülni. A későbbiekben, amikor megoldott lesz az információk telefonvonalon történő üzembiztos továbbítása, ez a kérdés tovább egyszerűsödik.

Az NC megmunkálás előnye a hagyományos másolómarással szemben az adott munkadarabhoz jobban igazodó, hatékony technológia, a gyártás elérhető pontosságának növekedése, könnyű szerszámcsere lehetőség, a nem konturkövető és a többfogatásos konturkövető megmunkálások egyszerű megvalósítása, a megmunkálható alkatrészek körének növekedése különösen 5 tengelyben pályavezérelhető (5D) NC marógépeknél stb.

Jelentős előnye az NC géppel történő megmunkálásnak, hogy a szoborszerű felületek megmunkálását automatizálhatóvá teszi, azaz a kézi megmunkálást jelentős mértékben, illetve teljes egészében kiküszöböli és az NC gép révén lehetővé válik a megmunkálásnak integrált gyártórendszerbe történő beillesztése.

2. MATEMATIKAI MÓDSZEREK SZOBORSZERŰ FELÜLETEK LEIRÁSÁRA

2.1 Általános szempontok

Változatos és szabálytalan geometriájú u.n. szoborszerű alkatrészek tervezéséhez, valamint NC gépeken való megmunkálásához elengedhetetlenül szükséges, hogy a legkülönbézetesebb geometriai alakzatok leírására megfelelő matematikai módszerekkel rendelkezünk. Az analitikus geometrián belül régóta ismerünk olyan módszereket, amelyek felületek leírására szolgálnak. A számítógéppel segített tervezés és megmunkálás céljaira azonban olyan módszereket kell kiválasztani, illetve nem egy esetben újakat kidolgozni, amelyek egyrészt a gyakorlatban előforduló felületek speciális sajátosságaihoz, másrészt a számítógépes reprezentációhoz is jól illeszkednek.

Mivel a felületleíró módszereket a műszaki gyakorlatban előforduló felületek (pl. süllyesztékek, présszerszámok, turbinalapátok, járműkarosszériák, különleges profilu géprészek) leírására kívánjuk használni, könnyen és természetes módon kell leírniuk igen változatos geometriájú felületeket, amelyek sok esetben matematikai szempontból szinguláris helyeket tartalmaznak. Így előfordulhatnak végtelen meredekségű szakaszok, élek, különböző rendű derivált-beli ugrások, zárt térfogatok és visszatérő felületdarabok. Mindezek leírására a $z = f(x,y)$ alaku explicit függvényeket csak igen nehezen, vagy egyáltalán nem tudjuk felhasználni, hisz a szóbajövő függvények választéka meglehetősen szűk. Sokkal nagyobb szabadsággal rendelkezünk a kezelhető felületek alakját és a fenti szingularitásokat illetően, ha a felületet kétparaméteres vektor-skalár függvénnyel írjuk le, amikor is a három

koordináta változását három egymástól függetlenül megadható kétváltozós függvény írja le:

$$x = x(u,v) , y = y(u,v) , z = z(u,v) ,$$

vagy vektoriális formában: $\vec{F} = \vec{F}(u,v)$.

E függvény tehát az $[u,v]$ paramétersík egy tartományának minden pontjához egy vektort rendel és a vektorok végpontja feszíti ki a felületet. Ily módon a felület az $[uv]$ paramétersík $\vec{F} = \vec{F}(u,v)$ által létrehozott leképezésének tekinthető. A vektoriális leírásmódból következik, hogy a felület matematikai reprezentációja független a koordinátatengelyek megválasztásától, a forgatás, eltolás vagy egyéb affin transzformációk egyszerű mátrix-szorzással vehetők figyelembe. Ez azt jelenti, hogy bármilyen geometriai tulajdonság vektoriális formában kifejezve független a koordinátarendszertől.

Gyakorlatban előforduló felületeink általában olyannyira bonyolultak, hogy egyetlen vektor-skalár függvénnyel nem sikerül leírni őket. Ezért valamilyen rendszer szerint részekre kell bontani az összefüggő felületet és egy-egy "elemi felületre" külön-külön kell definiálni egy-egy leírófüggvényt. Ugyanakkor esztétikai, de legtöbbször alapvető fizikai okok miatt is biztosítani kell a felület simaságát, illetve a különböző rendben való folytonosságot is e felületelemek között. Így tehát olyan két-paraméteres függvényeket kell választanunk a vektorkoordináták leírására, melyek lehetőleg egyszerű alakúak, ugyanakkor megfelelő szabad paraméterekkel rendelkeznek a fenti kapcsolatok létrehozására.

Külön követelményt jelent a felületleíró módszerekre nézve, hogy az összes geometriai jellegű műveletet számítógéppel kívánjuk elvégezni, tehát e módszereknek számítógépen jól reprezentálhatóknak kell lenniük. A felületet definiáló geometriai információkat egyszerűen és reális keretek között kell tárolni, ugyanakkor rugalmas lehetőséget kell biztosítani az interaktív tervezést lehetővé tevő változtatásokra.

A módszereknek lehetővé kell tenni különféle felületjellemzők (érintők, normálisok, metszetek, vetületek) számítógépes számítását racionális időráfordítással. Lehetőséget kell biztosítani a felületek és felületelemek megjelenítésére, rendszerint szintén számítástechnikai eszközök felhasználásával.

Mindezen szempontok nagyrésze ujonnan felmerült, speciális, a feladat természetéből adódó követelmény és magyarázza azt a tényt, hogy bár a matematika régóta képes felületek leírására, a számítógépes tervezés és megmunkálás céljaira szolgáló módszerek intenzív kidolgozása mindössze néhány éves mult-ra tekint vissza.

E fejezetben tárgyaljuk a "számítógépes geometria" (Computational Geometry) térbeli felületek és görbék leírására szolgáló módszereit. A görbeinterpolációs és approximációs eljárásokat nemcsak azért tárgyaljuk, mert ezek általánosításként több felületleíró módszer egyszerűbben kifejezhető, hanem mint látni fogjuk bizonyos felületgeneráló eljárásoknál ténylegesen szükség is van felületen futó görbék, peremgörbék stb. pontos leírására. Ugyanakkor a görbékre megállapított geometriai tulajdonságok - bemutatásuk itt egyszerűbb - analóg módon az általánosításként adódó felületekre is megmaradnak.

2.2 Görbék interpolációja, approximációja

Kivánt görbealakot leíró matematikai reprezentáció előállítása a műszaki gyakorlatban sok esetben úgy történik, hogy ismert görbealakot adó függvények osztályából a leírni kívánt görbéhez leginkább hasonlót vesszük, majd az utóbbi paramétereit úgy választjuk meg, hogy lehetőleg közel haladjon az eredeti görbéhez. Nyilvánvaló azonban, hogy ez esetben kötve vagyunk az ismert függvények - nem túl bő - osztályához, azonkívül általános eljárást sem tudunk adni a függvények kiválasztására, ami pedig számítógépes szempontból elengedhetetlen lenne. Ezért a továbbiakban olyan módszerekkel foglalko-

zunk, amelyek nem a görbe egészét tekintik a maga folytonosságában. Ellenkezőleg, feltesszük, hogy a közelíteni kívánt görbéről diszkrét pontokban rendelkezünk információkkal (függvényérték, deriváltak) és feladatunk a görbét rekonstruálni e pontokbeli viselkedésének ismeretében. Ha az előállított görbe exakt módon visszaadja a pontokban előírt értékeket, akkor interpolációról beszélünk, ha pedig ezeket csak közelíti, akkor approximációról.

Természetesen egyéb kikötéseket is tehetünk az előbbieken felül; például megkövetelhetjük, hogy bizonyos rendű deriváltak folytonosan változzanak a görbe mentén. Részben a pontokban előírt kényszerek fajtájától, részben az egyéb kikötésektől függően, különböző interpolációs ill. approximációs módszerekhez jutunk.

Említettük, hogy egy tervezett görbe matematikai reprezentánsaként paraméteres vektor-skalár függvényeket fogunk használni:

$$(1) \quad \bar{G} = x(u)\bar{i} + y(u)\bar{j} + z(u)\bar{k},$$

alakban, ahol az x, y, z koordinátafüggvények az u paraméter függvényei, \bar{G} pedig a görbe egy pontjához mutató vektor. Célunk a koordinátafüggvények előállítása interpolációval vagy approximációval. Mivel e módszerek szempontjából nem teszünk különbséget az egyes koordináták között, a megfelelő összefüggéseket általában csak az egyik koordinátára írjuk fel és ezt $g(u)$ -val jelöljük; $g(u)$ tehát jelenti a három koordinátafüggvény (x, y, z) közül bármelyiket.

A közelíteni kívánt görbe jelölésére $\bar{P}(u)$ -t használjuk. $\bar{P}(u)$ -t csak diszkrét pontokban $\bar{P}(u_i)$ ismerjük; e pontok valamely koordinátáját $p(u_i)$ és itt az r -edik deriváltat

$$\frac{\partial^{(r)}(u_i)}{\partial u^{(r)}} \quad \text{jelöli.}$$

A tárgyalásra kerülő módszerek a $g(u, p(u_i), p^{(r)}(u_i))$ függvényt szolgáltatják. Ezt mindhárom koordinátára értelem-szerűen felírva, majd az (1) szerinti összeadást elvégezve a $\bar{G}(u)$ görbét leíró vektor-függvényhez jutunk.

Ha a görbét részekre bontjuk, a $g(u)$ függvények száma meg fog egyezni az elemi görbedarabok számával. Mivel gyakorlati esetekben általában sok görbedarabra van szükség, célszerű $g(u)$ u -tól való függését egyszerűnek és számítógépen könnyen számíthatónak választani.

Ezért a továbbiakban kikötjük, hogy $g(u)$ u -nak n -edfoku polinomja legyen. Gyakorlati esetekben n értékét még korlátozzuk is: $n \leq 3$. Ennek indoka az, hogy szakaszonként harmadfoku görbével még a másodrendű folytonosság biztosítható az egész görbe mentén (ez elegendő csaknem valamennyi gyakorlati esetben), ugyanakkor az esetleg szükséges inverz műveletekhez is (pl. gyökkeresés) megfelelő eljárásokkal rendelkezünk.

Interpolációs módszerek

2.2.1 Lagrange módszer

Adjuk meg a térbeli pontokat, melyek az u paraméter különböző értékeihez tartoznak;

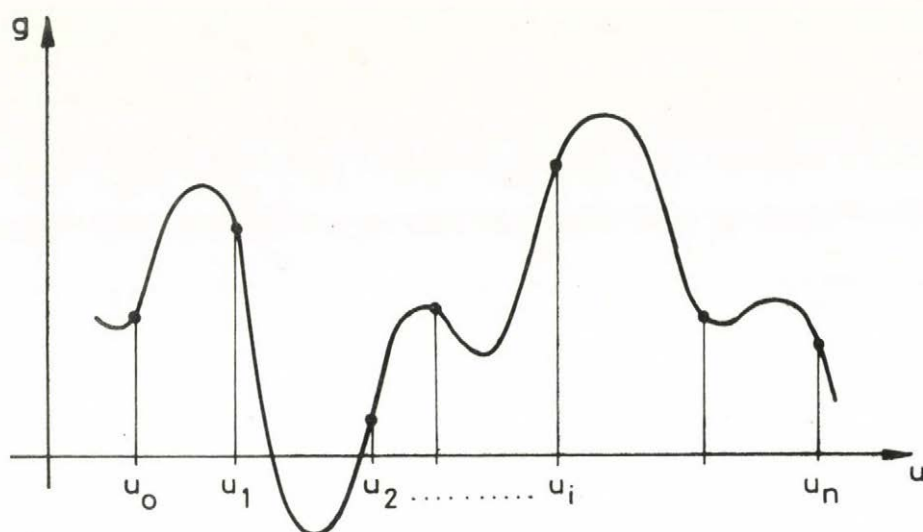
$$\bar{P}(u_i) = \bar{P}_i,$$

és fektessünk görbét e pontokon keresztül (4. ábra)

$$\bar{G}(u_i) = \bar{P}_i,$$

vagy a koordinátafüggvényekre:

$$g(u_i) = p_i, \quad 0 \leq i \leq n$$



4. ábra.

Állítsuk elő továbbá a $g(u)$ függvényt $g(u_i)$ -k lineáris kombinációjaként; és a szorzótényezők legyenek u függvényei:

$$(2) \quad g(u) = \sum_{i=0}^n s_i(u) g_i(u_i) = \sum_{i=0}^n s_i(u) p_i$$

A $g(u)$ függvény valóban átmegy a p_i pontokon, ha az $s_i(u)$ függvények, a súlyfüggvények kielégítik az alábbi feltételt:

$$(3) \quad s_i(u_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad 0 \leq (i, j) \leq n$$

azaz $s_i(u_j) = \delta_{ij}$, ahol δ_{ij} a Kroenecker szimbólum.

Súlyfüggvénynek bármilyen (3)-at kielégítő függvényt választhatunk, mivel azonban "sima" görbét szeretnénk kapni, a súlyfüggvényeknek is simának kell lenniök. Ezért, valamint a fent elmondottak alapján $s(u)$ számára polinomot választunk. Mivel (3) szerint $s_i(u)$ értékét az $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ értékeknél, azaz összesen $n+1$ helyen kell előírni, a polinomnak $n+1$ együtthatója van, tehát n -ed fokú és (3) szerint gyökhelyei épp az u_0, u_1, \dots, u_n paraméterértékeknél vannak. A (2) összegezés miatt ekkor $g(u)$ is n -edfokú és

$$(4) \quad g(u) = a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_{n-1} u + a_n$$

alakban írható.

Definiáljuk az \underline{a} , \underline{u} , \underline{s} , \underline{p} vektorokat a következőképpen (nem térvektorok!)

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u^n \\ u^{n-1} \\ \vdots \\ u \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{s} = \begin{bmatrix} s_0(u) \\ s_1(u) \\ \vdots \\ s_i(u) \\ \vdots \\ s_n(u) \end{bmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \underline{p} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

E jelölésekkel ((4) és (2) figyelembevételével)

$$g(u) = \underline{u}^T \underline{a} = \underline{s}^T \underline{p},$$

ahol a felső T index transzponálást jelent.

Kiinduló feltételünk értelmében azonban:

$$g(u_i) = \underline{u}_i^T \underline{a} = p_i$$

Írjuk fel ezt az egyenletet i különböző értékeire:

$$\begin{bmatrix} u_0^n & u_0^{n-1} & \dots & u_0^i & \dots & u_0 & 1 \\ u_1^n & u_1^{n-1} & & u_1^i & & u_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n-1}^n & u_{n-1}^{n-1} & & u_{n-1}^i & & u_{n-1} & 1 \\ u_n^n & u_n^{n-1} & \dots & u_n^i & & u_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

vagy rövidebben:

$$\underline{\underline{M}} \underline{a} = \underline{p}$$

Az itt szereplő $\underline{\underline{M}}$ mátrix invertálásával ($\underline{\underline{M}}^{-1} = \underline{\underline{L}}$):

$$\underline{a} = \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{p} = \underline{\underline{L}} \underline{p}$$

vagyis a polinomegyütthatók az előírt koordinátaértékekkel (p_i) kifejezhetők és az $\underline{\underline{L}}$ mátrix csak a paraméterértékeket tartalmazza. Ezekután \underline{a} -t $g(u)$ -ba visszahelyettesítve:

$$g(u) = \underline{u}^T \underline{\underline{L}} \underline{p}$$

és láthatóan $\underline{u}^T \underline{\underline{L}}$ adja a súlyfüggvényeket: $\underline{s}^T = \underline{u}^T \underline{\underline{L}}$.

Az $s_i(u)$ súlyfüggvényeket közvetlenül is megkaphatjuk, ugyanis az

$$(6) \quad s_i(u) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (u - u_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (u_i - u_j)}$$

n -edfoku polinom láthatóan kielégíti a (3) feltételt.

E súlyfüggvények felhasználásával tehát tetszőleges számú ponton áthaladó görbe egyenletét fel tudjuk írni. A pontok számának növekedtével természetesen $g(u)$ fokszáma is nő, és így egyre nagyobb oszcillációkat fog mutatni. Végeredményben tehát a Lagrange módszerrel kapott görbe tartalmazza az előre megadott pontokat, midnenütt n -ed rendben folytonos, de a pontok közötti viselkedéséről előre semmi információ sincs, sőt nagyobb pontszám esetén jelentős ingadozások várhatók.

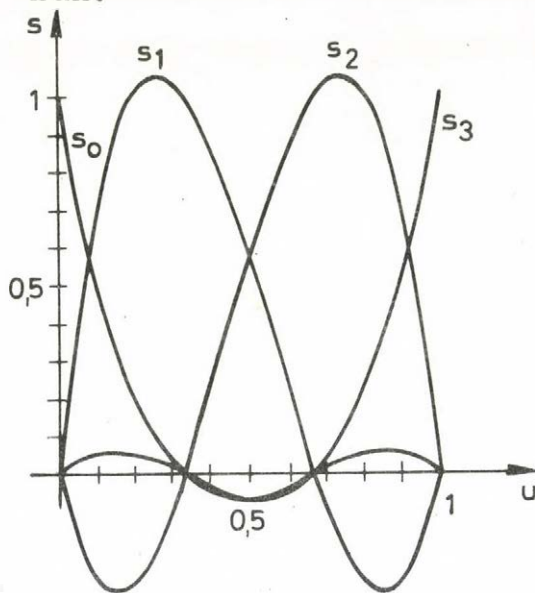
Csökkenthetjük az ingadozások mértékét, ha részekre bontjuk a görbét és e részeken belül alacsonyabb fokszámu Lagrange-polinommal közelítünk. Ez esetben a görberészek folytonosan kapcsolhatók egymáshoz, de a deriváltakban való folytonosságot már nem tudjuk biztosítani.

Az alábbiakban megadjuk $n = 3$ esetére az \underline{L} mátrixot, valamint a súlyfüggvényeket, amelyeket az 5. ábrán ábrázoltunk. A négy u_i érték:

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \frac{1}{3}, \quad u_2 = \frac{2}{3}, \quad u_3 = 1.$$

Itt jegyezzük meg, hogy mivel a három koordinátaérték egyértelműen meghatározza egy térbeli pont helyzetét, a hozzátartozó paraméterérték (u_i) megválasztásától függetlenül

tartalmazza az interpolációval előállított görbe az előre megadott pontokat. Ezért a továbbiakban általában egyenletes paraméterelosztást használunk a $[0,1]$ paraméter-intervallumban.



$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -9 & 27 & -27 & 9 \\ 18 & -45 & 36 & -9 \\ -11 & 18 & -9 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. ábra.

$$s_0 = \frac{1}{2}(-9u^3 + 18u^2 - 11u + 2) = (1-u)[1 - 4,5u(1-u)]$$

$$s_1 = \frac{1}{2}(27u^3 - 45u^2 + 18u) = u(1-u)(9 - 13,5u)$$

$$s_2 = \frac{1}{2}(-27u^3 + 36u^2 - 9u) = u(1-u)(13,5u - 4,5)$$

$$s_3 = \frac{1}{2}(9u^3 - 9u^2 + 2u) = u[1 - 4,5u(1-u)]$$

2.2.2 Hermite módszer

A Lagrange módszernél csak azokat a térbeli pontokat adtuk meg, ahol a leírni kívánt görbe áthalad. E pontok környezetében azonban pontosabban is leírhatjuk a görbe viselkedését, ha megadjuk a görbe érintőjét is e pontokban: (6. ábra)

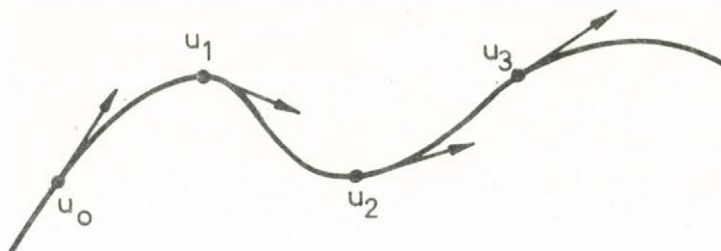
$$\bar{G}(u_i) = \bar{P}_i \quad 0 \leq i \leq n$$

$$\frac{d\bar{G}(u_i)}{du} = \frac{d\bar{P}_i}{du}$$

vagy bármely koordinátafüggvényre:

$$(7) \quad \begin{aligned} g(u_i) &= p_i \\ g'(u_i) &= p'_i \end{aligned}$$

ahol az u szerinti deriválást vesszővel jelöltük



6. ábra.

A $g(u)$ függvényt továbbra is a (4) alatti polinom alakjában keressük. Mivel azonban most az $n + 1$ pontban összesen $2(n + 1) = 2n + 2$ adatunk van, $g(u)$ fokszáma $2n + 1$ lesz. Ha tehát a (7) feltételeket behelyettesítjük $g(u)$ polinomjába, egy (5) -höz hasonló egyenletrendszerhez jutunk, amelynek mérete azon-

ban pontosan kétszerese lesz az (5)-ben szereplőnek. Az \underline{M} mátrix invertálása ezért nagyobb gondot okoz, ez pedig most ráadásul elkerülhetetlen, mert a súlyfüggvényeket (6)-hoz hasonló egyszerű alakban nem tudjuk közvetlenül felírni. Ezért egy görbe egyetlen $g(u)$ függvénnyel való közelítése a Hermite módszer alapján általában nehezekebb mint a Lagrange módszerrel.

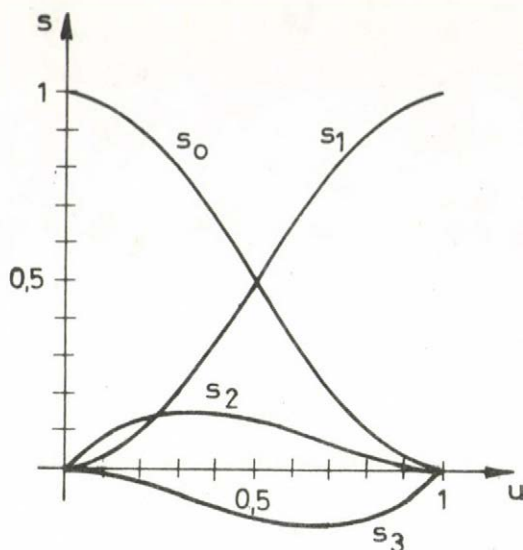
Igen jól használható a Hermite-módszer azonban görbeszakaszok közelítésére. Ez esetben, ha a görbeszakaszt leíró pontok számát előre rögzítjük, a mátrixinverziót csak egyszer kell elvégezni és bármely görbeszakaszt közelítő polinom együtthatóit ugyanazon mátrixszal számítjuk. Ugyanakkor mivel a görbeszakaszok határán a deriváltakat is megadhatjuk, a görbeszakaszokat folytonos meredekséggel tudjuk egymáshoz kapcsolni.

Ha tehát egy görbeszakaszt két végpontjával: $p(0)$, $p(1)$ és az itt megadott deriváltjaival: $p'(0)$, $p'(1)$ jellemezzük, akkor e görbeszakasz közelítésére $2n + 1 = 3$ -adfoku Hermite-polinomot használhatunk:

$$(8) \quad g(u) = \underline{u}^T \underline{H} \underline{p} = [u^3, u^2, u, 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p'(0) \\ p'(1) \end{bmatrix} =$$

$$= s_0(u)p(0) + s_1(u)p(1) + s_2(u)p'(0) + s_3(u)p'(1)$$

A súlyfüggvények a következők: (7. ábra)



$$s_0 = 1 - u^2(3 - 2u)$$

$$s_1 = u^2(3 - 2u)$$

$$s_2 = u(u-1)^2$$

$$s_3 = u^2(u-1)$$

7. ábra

A Hermite módszert általánosítani lehet arra az esetre, amikor nemcsak az első, hanem az első, második, ... N-edik deriváltakat írjuk elő a görbe pontjaiban.

A függvényértéket a 0-dik deriválnak véve és az r-edik deriváltat az u_i paraméterértéknél

$\bar{G}^{(r)}(u_i) = \bar{G}_i^{(r)}$ -rel jelölve, megköveteljük tehát, hogy

$$\bar{G}^{(r)}(u_i) = \bar{P}^{(r)}(u_i) \quad \begin{matrix} 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq r \leq N \end{matrix}$$

legyen.

A koordinátákat közelítő Hermite polinomra ekkor:

$$(9) \quad g(u) = \sum_{i=0}^n \sum_{r=0}^N s_{r,i}(u) p^{(r)}(u_i),$$

ahol a súlyfüggvényekre (9) deriválásával és helyettesítéssel a következő feltételt kapjuk:

$$(10) \quad s_{r,i}^{(q)}(u_j) = \delta_{i,j} \delta_{r,q}$$

A (9) sor kiértékelése, valamint a (10) feltételt kielégítő súlyfüggvények meghatározása kis n és N értékek esetén viszonylag egyszerű.

2.2.3 Taylor módszer

Ha egy görbét egy pont környékén akarunk igen pontosan leírni, a Taylor módszert használjuk, amely tulajdonképpen speciális esete a (9) általánosított Hermite-módszernek. Legyen ugyanis $n = 0$; ekkor (9) átmegy $g(u)$ véges Taylor sorába:

$$g(u) = \sum_{r=0}^N s_{r,0}(u) p^{(r)}(u_0)$$

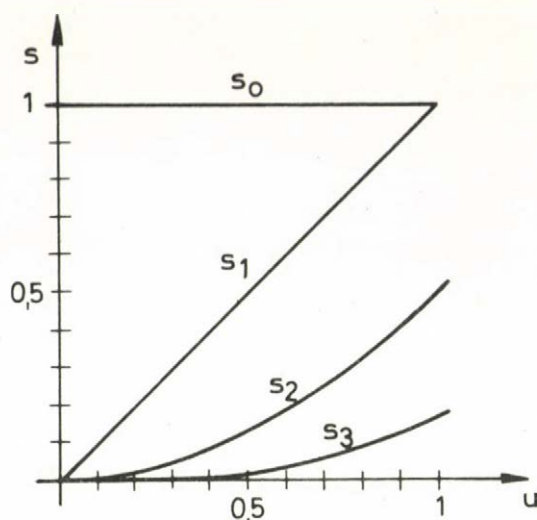
Az $s_{r,0}(u)$ súlyfüggvények ekkor természetesen a Taylor együtthatók, amelyek kielégítik a (10) feltételt is:

$$s_{r,0}(u) = \frac{(u - u_0)^r}{r!}$$

Speciálisan harmadfokú Taylor polinomra, és $u_0 = 0$ esetén:

$$g(u) = \underline{u}^T \underline{T} \underline{p} = [u^3, u^2, u, 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p'_0 \\ p''_0 \\ p'''_0 \end{bmatrix}$$

és a súlyfüggvények (8. ábra)



$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= u \\ s_2 &= \frac{u^2}{2} \\ s_3 &= \frac{u^3}{6} \end{aligned}$$

8. ábra.

Approximációs módszerek

2.2.4 Bezier-módszer

Adjuk meg a térben a $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ pontokat. A Bezier-módszerrel meghatározott térbeli görbe általában nem megy át e pontokon, hanem a pontok által kifejezett térbeli poligont közelíti. Ha a pontokhoz tartozó paraméterértékeket az $u = [0, 1]$ intervallumban egyenletesen osztjuk el; $u_i = \frac{i}{n}$, a görbe egyenlete

a Bezier-módszer szerint:

$$(11) \quad \bar{G}(u) = \sum_{i=0}^n s_i(u) \bar{P}_i \left(\frac{i}{n} \right)$$

ahol a polinomiális súlyfüggvényeket a következő kifejezés adja:

$$(12) \quad s_i(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

A súlyfüggvények láthatóan az $[(1-u)+u]^n = 1$ binomiális sorfejtésének tagjai, e súlyfüggvények összege így bármely u -nál:

$$\sum_{i=0}^n s_i(u) = 1$$

Ebből következik, hogy ha a \bar{P}_i pontok egy egyenesen fekszenek, a $\bar{G}(u)$ függvény visszaadja ezen egyenest. Helyettesítsünk (12)-be $u = 0$ -t; egy kivételével mindegyik súlyfüggvény zérus lesz és $s_0(0) = 1$. Így tehát $\bar{G}(0) = \bar{P}_0$. Hasonlóan adódik: $\bar{G}(1) = \bar{P}_n$. Képezzük ezután a súlyfüggvények deriváltját:

$$\frac{ds_i(u)}{du} = \binom{n}{i} [i u^{i-1} (1-u)^{n-i} - (n-i) u^i (1-u)^{n-i-1}]$$

Behelyettesítéssel adódik, hogy a zérustól különböző esetekben:

$$\begin{aligned} s_0'(0) &= -n & s_n'(1) &= n \\ s_1'(0) &= n & s_{n-1}'(1) &= -n \end{aligned}$$

Ennek figyelembevételével (11) alapján:

$$\bar{G}'(0) = n(\bar{P}_1 - \bar{P}_0)$$

$$\bar{G}'(1) = n(\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1})$$

adódik. Tehát a Bezier-görbe kezdő és végpontja egybeesik az n pontból álló poligon kezdő és végpontjával, végpontbeli érintője pedig az első két ill. utolsó két pont által meghatározott egyenes irányába mutat. A poligon többi pontján nem megy keresztül a görbe, azonban a Weierstrass-féle konvergenciaelmélet alapján bebizonyítható, hogy egy adott görbén fekvő pontok alapján felírva a (11) Bezier-polinomot és e pontok számát a görbe meneténnövelve, egyenletes konvergenciát kapunk nemcsak a koordináták, de a magasabbrendű deriváltak vonatkozásában is. Sőt bizonyos normára vonatkozóan a Bezier-approximáció a minimum normájú közelítés.

A Bezier-módszer geometriai tervezés szempontjából egyik leglényegesebb tulajdonsága az, hogy legalább olyan sima görbét eredményez, mint a kiindulásul szolgáló, P_i -ket tartalmazó görbe. Ez várható már abból is, hogy a (12) súlyfüggvények pozitívak az $u = [0,1]$ intervallumban és gyökhelyük az intervallum belsejében nincs. Ezen felül ha $p(u)$ deriváltjainak korlátjára az $u = [0,1]$ intervallumban

$$\alpha_r \leq p^{(r)}(u) \leq \beta_r \quad 0 \leq r \leq n$$

akkor

$$\alpha_r \leq \frac{n^r}{n(n-1)\dots(n-r+1)} \cdot g_n^{(r)}(u) \leq \beta_r$$

$$\text{ha} \quad 1 \leq r \leq n$$

és

$$\alpha_0 \leq g_n(u) \leq \beta_0 \quad \text{ha} \quad r = 0$$

ahol $g_n^{(r)}(u)$ az n pont alapján felírt Bezier-polinom r -edik deriváltja. Más szóval a Bezier polinom a kiinduló függvény maximális és minimális értéke közti sávban halad és ha az eredeti függvény monoton, a Bezier-polinom is az, valamint megőrzi az eredeti görbe konvex vagy konkáv sajátságait. Ebből az is következik, hogy a Bezier görbe a \bar{P} pontok által meghatározott konvex poligonon belül halad.

A Bezier-módszer simító hatását mutatja a következő tétel is. Bármely egyenesnek a Bezier-görbével való metszéspontjainak száma nem haladhatja meg ugyanezen egyenesnek a poligonon való metszéspontjainak számát.

Mindezen tulajdonságok alapján a Bezier-módszer hatásos eljárásának bizonyul a geometriai tervezésben sima görbék előállítására; segítségével széles tartományban is sima és esztétikailag kifogástalan görbék állíthatók elő, nemkivánt oszcillációktól mentesen. A görbealak módosítása könnyen keresztül vihető a poligon csúcspontjainak módosításával. A tapasztalat azt mutatja, hogy a tervezőben hamar kialakul az a gyakorlat, melynek alapján előre megbecsülheti, hogy a pontok változtatása milyen mértékben hat a görbére. Ily módon az interaktív görbetervezés egyik leghatásosabb módszere a Bezier-módszer.

A módszer hátrányaként csupán két tényt kell megemlíteni. Az egyik, hogy a poligon egy csúcspontjának megváltoztatása az egész görbe alakjára hatással van, bár a pont környezetétől távolodva egyre gyengülő mértékben (amint ez a (12) alatti súlyfüggvények alakjából következik).

A másik hátrány abban mutatkozik, hogy a pontok száma megszabja a Bezier-polinom fokszámát, aminek eredményeképpen egy pont hozzávétele vagy elvétele a pontok halmazához megváltoztatja az approximáció pontosságát az egész görbe mentén.

Végezetül megadjuk a harmadfoku Bezier-polinomot definiáló mátrixot, valamint e polinom súlyfüggvényeit (9. ábra).

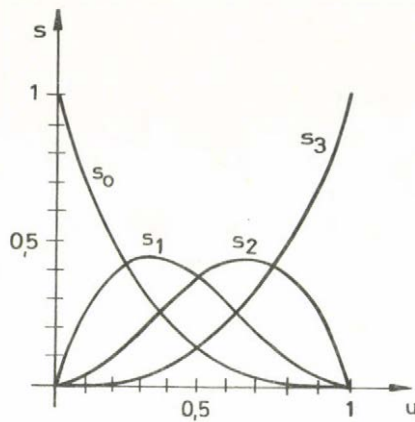
$$g(u) = \underline{u}^T \underline{Z} \underline{p} = [u^3, u^2, u, 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$s_0 = -u^3 + 3u^2 - 3u + 1 = (1 - u)^3$$

$$s_1 = 3u^3 - 6u^2 + 3u = 3u(1 - u)^2$$

$$s_2 = -3u^3 + 3u^2 = 3u^2(1 - u)$$

$$s_3 = u^3$$



9. ábra.

$$g(0) = p_0$$

$$g(1) = p_3$$

$$\left(\frac{dg}{du}\right)_0 = 3(p_1 - p_0)$$

$$\left(\frac{dg}{du}\right)_1 = 3(p_3 - p_2)$$

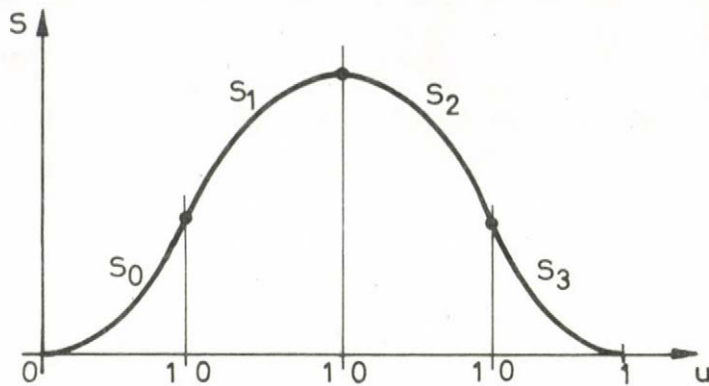
2.2.5 B-spline módszer

A spline módszer megtartja a Bezier-módszer fent említett előnyös tulajdonságait, de ugyanakkor a hátrányokat kiküszöböli; ily módon a Bezier-módszer általánosításaként tekinthető.

Az eddig említett módszerek mind olyanok, hogy a görbét megadó minden adathoz (pont, deriváltak) egy-egy súlyfüggvény tartozik, amely azonban a görbe teljes tartományán zérustól különbözik. Ennek következményeként bármely adat megváltoztatása az egész görbére kihat. Természetesen adódik a gondolat, hogy olyan súlyfüggvényeket konstruáljunk, amelyek csak egy véges intervallumban különböznek zérustól; ily módon egy adat hatását ezen intervallumra korlátozhatjuk. Ezen súlyfüggvények megszerkesztését a harmadfoku spline esetre mutatjuk be.

Legyenek tehát megadva a térben a $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \bar{p}_2 \dots \bar{p}_n$ pontok. Ezek közül négy egymásután következőt kiválasztunk. Az ezekhez tartozó súlyfüggvényeket keressük.

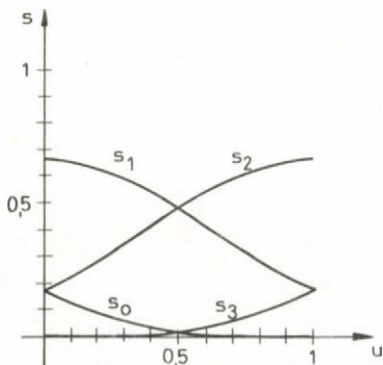
Állítsunk össze négy harmadfoku görbéből olyan harang alakú súlyfüggvényt, mely a következő sajátságokkal rendelkezik: (10. ábra)



10. ábra.

- mindegyik görbe az $u = [0, 1]$ intervallumban van értelmezve, és ott pozitív értékű,
- a görbék másodrendben folytonosan kapcsolódnak egymáshoz,
- az első görbe az $u = 0$ pontban és a negyedik görbe az $u = 1$ pontban másodrendben folytonosan kapcsolódik az u -tengelyhez.

E feltételeket kielégítő négy harmadfoku súlyfüggvény a következő: (11. ábra)



11. ábra.

$$s_0 = \frac{1}{6}(1-u)^3$$

$$s_1 = \frac{1}{6}[3u^3 - 6u^2 + 4]$$

$$s_2 = \frac{1}{6}[3(1-u)^3 - 6(1-u)^2 + 4]$$

$$s_3 = \frac{1}{6} u^3 \quad (14)$$

A $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ pontokat approximáló B-spline görbe ezek után a súlyfüggvények felhasználásával:

$$\bar{G}_{03}(u) = \sum_{i=0}^3 s_i \bar{P}_i = [u^3, u^2, u, 1] \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_0 \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \end{bmatrix} = u^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{P}} \quad (15)$$

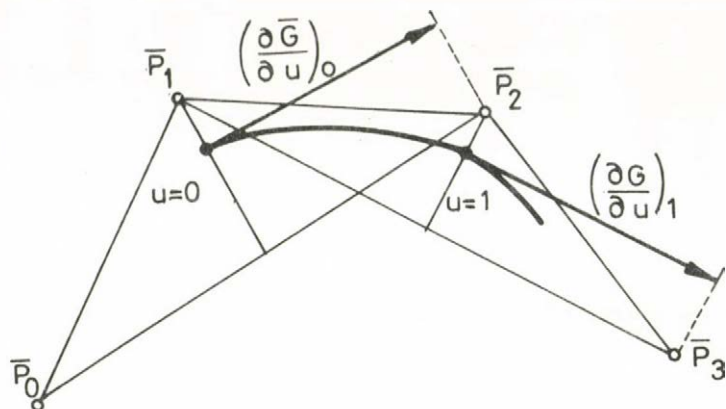
A következő görbedarabot úgy kapjuk, hogy a (15) egyenletbe a $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ pontokat helyettesítjük, majd a $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5$ -öt, és így tovább. E görbedarabok egymáshoz másodrendben folytonosan fognak csatlakozni, hiszen pl. $\bar{G}_{03}(u)$ -ban \bar{P}_1 szorzója $s_1(u)$ volt, míg $\bar{G}_{14}(u)$ -ban $s_0(u)$ lesz, e két súlyfüggvény pedig másodrendben folytonosan csatlakozik egymáshoz. Ugyanez érvényes a többi pontra, illetve a hozzájuk tartozó súlyfüggvényekre vonatkozóan is.

Határozzuk meg egy B-spline görbeiv kezdetét és végpontját, illetve itt a görbe érintőjét. u helyébe 0-t írva behelyettesítéssel adódik, hogy:

$$(16) \quad \bar{G}_{03}(0) = \frac{\bar{P}_0 + 4\bar{P}_1 + \bar{P}_2}{6}$$

és hasonlóképpen az $u = 1$ helyen

$$\bar{G}_{03}(1) = \frac{\bar{P}_1 + 4\bar{P}_2 + \bar{P}_3}{6}$$



12. ábra

$\bar{G}_{03}(0)$ éppen a $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2$ pont által alkotott háromszög $\bar{P}_0 \bar{P}_2$ oldalának felezőpontját a \bar{P}_1 csúccsal összekötő szakasz \bar{P}_1 felé eső harmadolópontjához mutató vektor és hasonlóképpen igaz ez $\bar{G}_{03}(1)$ és a $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ háromszög vonatkozásában. E két pont tehát a B-spline görbeiv kezdő és végpontja. E határpontokban a görbe érintőjét $\bar{G}_{03}(u)$ u szerinti deriválásával kapjuk:

$$(17) \quad \left(\frac{\partial \bar{G}_{03}}{\partial u} \right)_0 = \frac{\bar{P}_2 - \bar{P}_0}{2}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{G}_{03}}{\partial u} \right)_1 = \frac{\bar{P}_3 - \bar{P}_1}{2}$$

tehát az érintők a $\overline{P_2 P_0}$ ill. $\overline{P_3 P_1}$ egyenesek irányába mutatnak.

Hasonlóképpen kapjuk a másodrendű deriváltakat is $\overline{P_0}$, $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$, $\overline{P_3}$ függvényében:

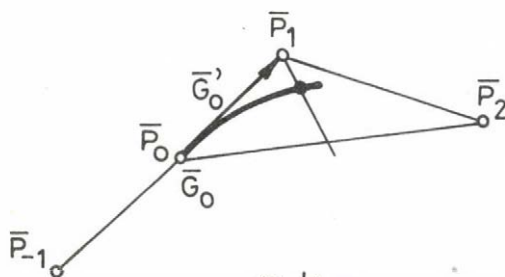
$$(18) \quad \left(\frac{\partial^2 G_{03}}{\partial u^2} \right)_0 = \overline{P_0} - 2\overline{P_1} + P_2$$

$$\left(\frac{\partial^2 G_{03}}{\partial u^2} \right)_1 = P_1 - 2\overline{P_2} + \overline{P_3}$$

A kezdő és a végpont megszerkesztését, valamint az érintőket a 12. ábrán láthatjuk.

A $\overline{P_0}$, $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$... pontok rögzítésével tehát a B-spline görbe kezdőpontja és kezdeti meredeksége kiadódik.

Néha szükség van azonban arra, hogy a görbe adott térbeli pontból ($\overline{G_0}$), adott meredekséggel ($\overline{G_0}'$) induljon. Ez könnyen elérhető, ha a $\overline{P_0}$, $\overline{P_1}$ valamint a pótlólagos $\overline{P_{-1}}$ pontokat a következőképp választjuk: (13. ábra)



13. ábra.

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_0 &= \bar{G}_0 \\
 (19) \quad \bar{P}_1 &= \bar{G}_0 + \bar{G}'_0 \\
 \bar{P}_{-1} &= \bar{G}_0 - \bar{G}'_0
 \end{aligned}$$

Ez esetben ugyanis a \bar{P}_{-1} , \bar{P}_0 , \bar{P}_1 háromszög egyenessé fajul és a (16), (17) egyenletek értelmében a görbe kielégíti a kezdeti feltételeket. Hasonlóan járhatunk el természetesen a görbe végpontjánál is.

A (14) súlyfüggvények alakjából következik, hogy a B-spline görbe nem megy át a $(\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n)$ definiáló pontokon. Egy kívánt alaku görbe tervezése általában úgy történik, hogy a görbe sajátságait nagyjából visszaadó poligonból indulunk ki és a csúcspontokat egyenként korrigálva folyamatosan közelítjük meg a kívánt görbét. Vagyis a görbetervezés folyamatos párbeszéd keretében zajlik le a számítógép és az ember között, állandó vizuális ellenőrzéssel. A kiinduló poligontól várhatóan erősen függ a görbeközelítés gyorsasága. Ezért célszerű lehet a kívánt görbén néhány jellegzetes pontot kiválasztani és meghatározni az ezen pontokon átmenő B-spline görbét definiáló poligon csúcspontjait.

Legyenek tehát $\bar{G}_0, \bar{G}_1, \bar{G}_2 \dots \bar{G}_n$ egy B-spline görbe előre adott pontjai, és határozzuk meg ezen görbét definiáló $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2$ pontokat. Válasszuk \bar{G}_i -t az i -edik B-spline görbedarab $u = 0$ paraméterű pontjának.

Ekkor:

$$\bar{G}_i = \frac{\bar{P}_{i-1} + 4\bar{P}_i + \bar{P}_{i+1}}{6}$$

Felírva ezen egyenleteket minden pontra, továbbá $\bar{P}_0 = \bar{G}_0$, $P_n = G_n$ -et véve, a következő mátrix-egyenlethez jutunk:

$$(20) \quad \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{P}_0 \\ \bar{P}_1 \\ \vdots \\ \bar{P}_i \\ \vdots \\ \bar{P}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_0 \\ \bar{G}_1 \\ \vdots \\ \bar{G}_i \\ \vdots \\ \bar{G}_n \end{bmatrix}$$

Ezen egyenlet megoldása szolgáltatja az ismeretlen \bar{P}_i poligoncsucsoakat. Ha ezekhez még a (19) egyenletekből adódó $\bar{P}_{-1} = 2\bar{P}_0 - \bar{P}_1$ ill. $\bar{P}_{n+1} = 2\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1}$ pontokat is hozzávesszük, a teljes B-spline görbéit ki tudjuk számítani \bar{G}_0 és \bar{G}_n között.

Ez esetben természetesen a görbe érintője a kezdeti és az utolsó pontban a számításból kiadódik, hiszen \bar{P}_0 eleve adott, \bar{P}_1 az egyenletrendszer megoldásából adódik és (19) értelmében $\bar{G}'_0 = \bar{P}_1 - \bar{P}_0$. Ugyanakkor behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a görbe végpontjaiban a második derivált értéke, pl.: $\bar{G}(0)'' = \bar{P}_{-1} - 2\bar{P}_0 + \bar{P}_1$ azonosan zérus.

Előfordulhat, hogy a görbe kezdőpontja és kezdeti meredeksége van megadva. Ez esetben, mivel

$$\bar{G}'_0 = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_{-1}}{2}$$

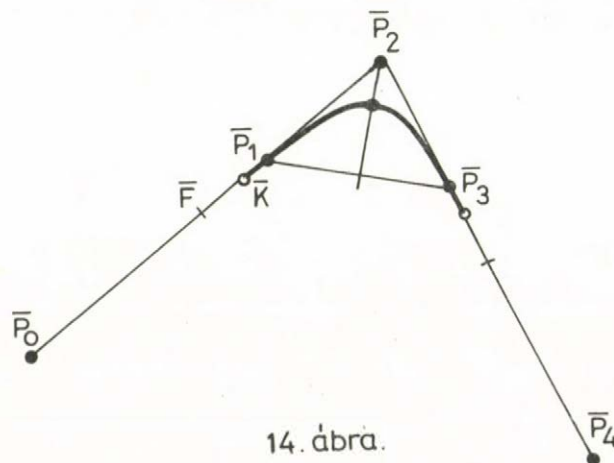
a (20)-nak megfelelő egyenlet a következő alakú lesz:

$$(21) \quad \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_{-1} \\ \bar{P}_0 \\ \vdots \\ \bar{P}_i \\ \vdots \\ \bar{P}_n \\ \bar{P}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}'_0 \\ \bar{G}_0 \\ \vdots \\ \bar{G}_i \\ \vdots \\ \bar{G}_n \\ \bar{G}'_n \end{bmatrix}$$

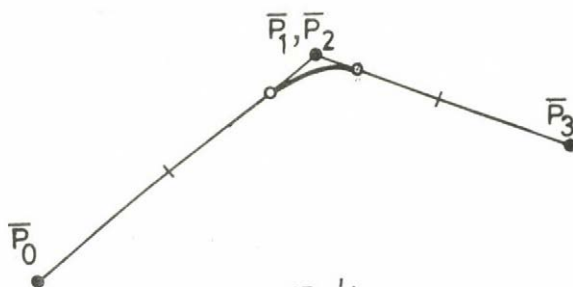
és a megoldásból az összes görbedefiniáló \bar{P}_i pont $(-1 \leq i \leq n+1)$ kiadódik.

A B-spline görbék számos érdekes és a geometriai tervezés szempontjából igen hasznos tulajdonsággal rendelkeznek. Szemelőtt tartva ugyanis a kezdő és végpontok helyére, valamint itt az érintő irányára vonatkozó fenti megfontolásokat, a következő görbealakokat kaphatjuk.

Ha három pont $(\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2)$ egy egyenesbe esik (14. ábra), a spline görbe ezen egyenesen lévő \bar{K} pontból indul, mely harmadolja a $\bar{P}_0\bar{P}_2$ felezőpontja (\bar{F}) és \bar{P}_1 közti távolságot. A görbe érintője e helyen megegyezik az egyenes irányával.

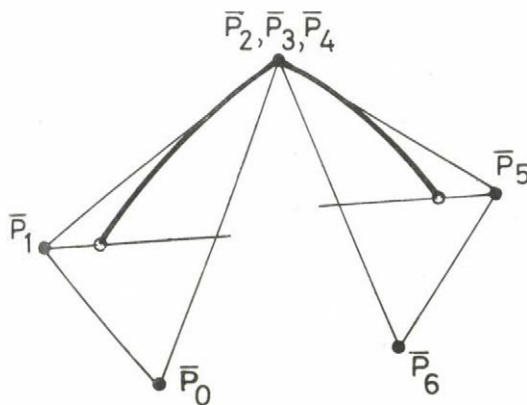


Két pont (\bar{P}_1, \bar{P}_2) egybeesése esetén (15. ábra) a görbe kezdő és végpontja a kettős pontokat és a rajtuk kívüli pontokat $(\bar{P}_0$ ill. $\bar{P}_3)$ összekötő egyeneseken van, a kettős ponttól $\frac{1}{6}(\overline{P_0P_1})$ ill. $\frac{1}{6}(\overline{P_2P_3})$ távolságban.



15. ábra.

Ha három pont esik egybe $(\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ a 16. ábrán), a spline görbén csucst tudunk létrehozni, amelyben az érintők ugrásszerű változását a hármaspont előtti és utáni pontok $(\bar{P}_1$ és $\bar{P}_5)$ térbeli helyzete határozza meg. Különösen figyelemreméltó, hogy bár a görbe érintőjében ugrásszerű változás van, a koordinátafüggvények paraméter szerinti deriváltjai másodrendben folytonosan csatlakoznak egymáshoz.



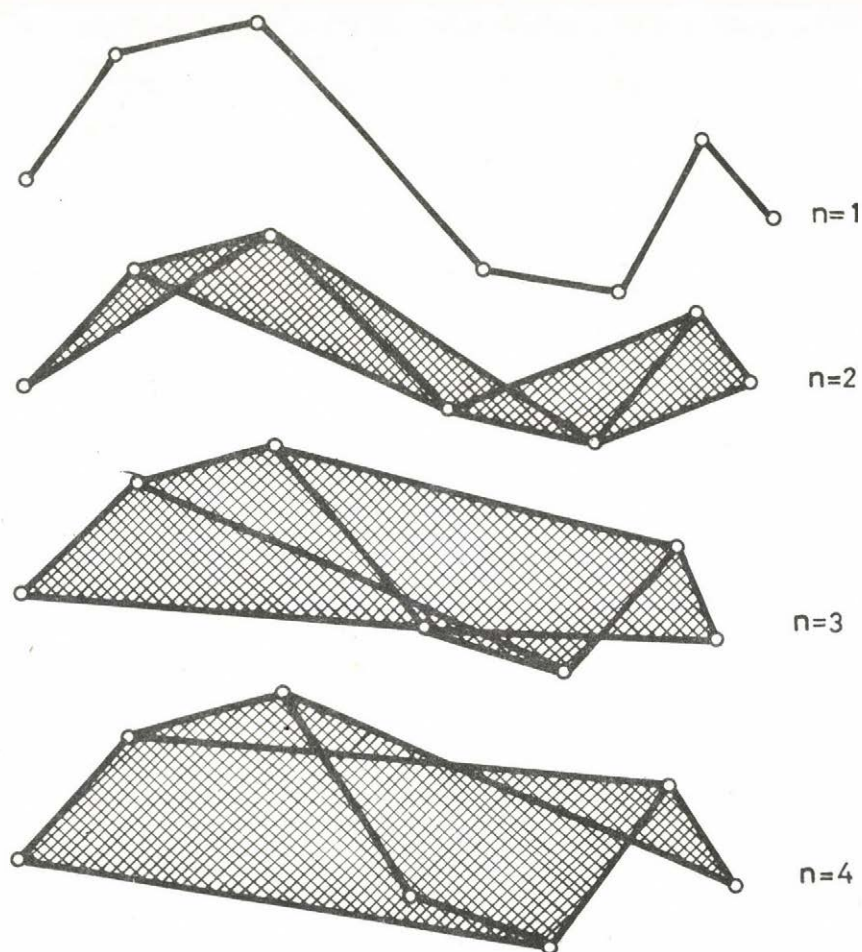
16. ábra.

Bár legtöbbször harmadfoku spline-függvényeket használunk geometriai alkalmazásokban - részint egyszerűségük miatt, részint mert a gyakorlatban előforduló igények (másodrendben folytonos deriváltak) velük ki-elégíthetők - a bemutatott módszer könnyen általánosítható n -edfoku polinomok esetére is. Ez esetben a (14)-nek megfelelő $n+1$ számú súlyfüggvény n -ed foku polinom és együtthatóit hasonló feltételek alapján lehet megtalálni. Egy görbedarabot most $n + 1$ térbeli pont határoz meg és a következő görbeiv ehhez $n - 1$ rendben folytonosan csatlakozik. Ily módon tehát ha a folytonosság rendje a görbe mentén elő van írva, akkor ebből meghatározhatjuk a spline függvények fokszámát. Vagyis ellentétben a Bezier-módszerrel, a pontok összes számától független a polinomok fokszáma és az csak a görbére tett fenti kikötésektől függ. Ez azt jelenti, hogy adott görbe leírásának pontosságát két független tényezőn keresztül befolyásolhatjuk; a pontok számán és a spline-függvények fokszámán keresztül.

Részletes vizsgálat mutatja, hogy a B-spline görbék rendelkeznek a Bezier-görbék előnyös tulajdonságaival. Hurkot vagy inflexiót csak akkor tartalmaznak, ha a kiinduló (\bar{P}_1 pontokat tartalmazó) görbe is ilyen tulajdonságú és rendelkeznek a Bezier-görbék oszcillációt csökkentő hatásával is. A B-spline görbe konvergenciája az eredetihez legalább olyan jó, mint a Bezier-görbéé, bár ugyanez a deriváltak konvergenciájára nem teljesül.

A Bezier-görbéhez hasonlóan a B-spline görbe bent halad a pontok által meghatározott konvex poligonon, csak hogy ezt a poligont most n -ed foku spline-görbe esetén $n + 1$ szomszédos pontból kell megszerkeszteni (17. ábra).

Ez pedig általában jóval kisebb tartományt határoz meg, mint a Bezier-módszer esetében az összes pontra megszerkesztett poligon.



17. ábra.

A fenti tulajdonság további következménye az, hogy ha $n + 1$ pont egy egyenesbe esik, akkor az ezek által definiált n -edfoku B-spline görbedarab is végig az

egyenesen halad, a szomszédos görbeivek pedig $(n-1)$ -ed
rendben folytonosan csatlakoznak az egyenes szakaszhoz.
Különösen értékes a B-spline görbék ezen sajátága
műszaki alkalmazásoknál, amikor is igen gyakran fordul
elő, hogy egyenes szakaszokhoz, síkokhoz folytonosan
csatlakoznak görbült felületek.

Mindezekhez járul még a B-spline görbéknek geometriai
tervezés szempontjából igen lényeges tulajdonsága; ezen
görbék lokális jellege. A görbe definiálásából ugyanis
kitűnik, hogy bármely pont helyzetének változtatása
csak $n + 1$ görbeivre van befolyással.

Ilymódon lehetőség nyílik a görbe helyenkénti változta-
tására anélkül, hogy egy jól definiált környezeten ki-
vül a görbe bármilyen változást szenvedne. Ugyancsak
könnyen változtathatjuk a görbealakot helyileg, újabb
pontok hozzáadásával vagy elvételével is. Mindezek a
lehetőségek a B-spline görbéket az interaktív görbe-
tervezés hatékony eszközévé teszik.

2.3 Matematikai módszerek felületek leírására

Térbeli felületek leírására a bevezetőben elmondottak alap-
ján kétparaméteres vektor-skalár függvényeket használunk:

$$\vec{F}(u,v) = x(u,v) \vec{i} + y(u,v) \vec{j} + z(u,v) \vec{k},$$

ahol \vec{F} jelenti a felület $[u,v]$ paraméterű pontjához
mutató vektort, az x,y,z koordinátafüggvények pedig két
független változótól függenek. Maga a felület az $[u,v]$
paramétersík egy tartományának a vektor-skalár függvény ál-
tal megvalósított leképezésének tekinthető. Az összefüggő
felületet általában részfelületekre bontjuk és e részfelü-
leteken belül az u és v paraméter változására az

$0 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq 1$ kikötést tesszük, vagyis a paraméter-sík egységnégyzet tartománya felel meg egy elemi felületnek. A felületet definiáló pontokat $\bar{P}(u_i, v_j) = \bar{P}_{ij}$ -vel jelöljük, a két koordinátairányban vett érintők pedig:

$$\left(\frac{\partial \bar{P}(u, v)}{\partial u} \right)_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} = \bar{P}^{(1,0)}(u_i, v_i)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{P}(u, v)}{\partial v} \right)_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} = \bar{P}^{(0,1)}(u_i, v_i)$$

Felületeknél szerepelnek még vegyes deriváltak is, pl.:

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{P}(u, v)}{\partial u \partial v} \right)_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} = \bar{P}^{(1,1)}(u_i, v_i)$$

amelyeknek nehéz geometriai jelentést adni; a felület \bar{P} -beli "csavarodására" jellemzők.

Felületen futó görbékét általában úgy kapunk, hogy az $[u, v]$ síkon $u = u(t); v = v(t)$ paraméteres alakban definiálunk egy görbét, majd ezt az $\bar{F} = \bar{F}(u, v)$ leképezéssel a felületre képezzük:

$$\bar{F} = \bar{F}(u(t), v(t)) = \bar{G}(t)$$

Az $[u, v]$ sík koordinátavonalainak a képe így a felületen a következő lesz:

$$\bar{F} = \bar{F}(u_0, v) \text{ illetve } \bar{F} = \bar{F}(u, v_0).$$

Hasonlóképpen fogunk használni térben előre megadott görbéket is amelyekre a felületet megfelelőképpen illesztjük; ezek jelölésére $\bar{P}(u_i, v)$, $\bar{P}(u, v_i)$ -t használjuk.

2.3.1 Görbeillesztési módszerek általánosítása: Szorzat felületek

Görbeinterpolálási módszereinket a következőképpen foglalhatjuk össze: a kívánt görbe egyenletét úgy kapjuk, hogy a rögzített paraméterértékekhez tartozó és előre adott pontok koordinátáit és paraméter szerinti deriváltjait alkalmasan választott súlyfüggvényekkel megszorozzuk és összeadjuk. Vektoriális formában:

$$(22) \quad \bar{G}(u) = \sum_{i=0}^n \sum_{r=0}^N s_{r,i}(u) \bar{P}^{(r)}(u_i)$$

$N = 0$ Lagrange-módszer

$N = 1$ Hermite-módszer

$n = 0$ Taylor-módszer

Ezt a módszert felületek leírására is alkalmazhatjuk. Jellemezzék tehát a felületet a $\bar{P}(u_i, v_j)$ pontok, valamint e pontokban az u , ill. v szerinti deriváltak. A felület egyenletét ezek súlyozott összegével állítjuk elő:

$$(23) \quad \bar{F}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{r=0}^N \sum_{q=0}^M s_{r,i}(u) s_{q,j}(v) \bar{P}^{(r,q)}(u_i, v_j)$$

A (23) egyenletben $n+1$ ill. $m+1$ a pontok száma u és v irányban, N, M a deriváltak száma egy-egy pontban. Az $\bar{F}(u, v)$ felület átmegy a $\bar{P}(u_i, v_j)$ pontokon és itt deriváltja $\bar{P}^{(r,q)}(u_i, v_j)$ lesz, azaz

$$\begin{aligned} \bar{F}^{(r,q)}(u_i, v_j) &= \bar{P}^{(r,q)}(u_i, v_j) \\ 0 &\leq i \leq n \\ 0 &\leq j \leq m \\ 0 &\leq r \leq N \\ 0 &\leq q \leq M \end{aligned}$$

ha a súlyfüggvények teljesítik a következő feltételeket:

$$s_{r,i}^{(p)}(u_k) = \delta_{p,r} \delta_{i,k}$$

$$s_{q,j}^{(\sigma)}(v_\ell) = \delta_{\sigma,q} \delta_{j,\ell}$$

Igy pl. a $\bar{P}(u_i, v_j)$ pontokra Lagrange módszerrel interpolált felületet úgy kapjuk, hogy a (23) egyenletbe $N=0$, $M=0$ -t helyettesítünk;

$$\bar{F}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m s_i(u) s_j(v) \bar{P}(u_i, v_j)$$

és az $s_i(u)$, $s_j(v)$ súlyfüggvények a görbeinterpolálásnál szereplő (6) súlyfüggvényekkel azonosak. Ha a felület pontjaiban az érintők is meg vannak adva, akkor Hermite-féle interpolálást használunk, amelynél $N = 1$ $M = 1$

$$\bar{F}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{r=0}^1 \sum_{q=0}^1 s_{r,i}(u) s_{q,j}(v) \bar{P}^{(r,q)}(u_i, v_j)$$

és a súlyfüggvények szintén a görbeinterpolációnál is használt függvények.

Végül a Taylor-módszerrel interpolált felület egyenletét az $u = 0$, $v = 0$ pont környezetében (23)-ból $n = 0$ $m = 0$ helyettesítéssel kapjuk:

$$\bar{F}(u, v) = \sum_{r=0}^N \sum_{q=0}^M s_r(u) s_q(v) \bar{P}^{(r,q)}(0, 0)$$

az $s_r(u)$, $s_q(v)$ súlyfüggvények pedig az u ill. v szerinti Taylor sorfejtés együtthatófüggvényei.

Mivel egy interpoláció tulajdonságait alapvetően a súlyfüggvények határozzák meg és valamely felületinterpolációs módszernél használt súlyfüggvények megegyeznek a megfelelő görbeinterpoláció súlyfüggvényeivel, az interpolált görbe tulajdonságaival analóg

(két dimenzióban mutatkozó) tulajdonságokkal fog rendelkezni a felület is. Ezek részletezésétől most eltekintünk.

A görbeinterpolációnál azt láttuk, hogy tömör, vektor-mátrixos formában tudjuk felírni egy görbe egyenletét, ha a súlyfüggvényeket polinomnak választjuk. (a 2.2 fejezetben a mátrixokat és a vektorokat harmadfokú polinom esetére írtuk fel):

$$(24) \quad \bar{G}(u) = \underline{u}^T \underline{A} \underline{P}$$

itt \underline{u}^T a koordinátahatványokból álló sorvektor, \underline{A} az interpolációra jellemző mátrix (\underline{L} , \underline{T} , \underline{H}), \underline{P} pedig az adatokból álló hipervektor; minden eleme egy-egy adat három koordinátáját tartalmazza (pontok koordinátái, deriváltak komponensei).

A (24) vektoregyenletet általánosíthatjuk felületek esetére is. Definiáljuk ugyanis \underline{v}^T -t \underline{u}^T -hez hasonlóan:

$$\underline{v}^T = (v^3, v^2, v, 1)$$

a felület adatait pedig foglaljuk össze a \underline{P} hiper-mátrixban, melynek i -edik sora az u_i -állandó, j -edik oszlopa pedig a v_j -állandó paramétervonalakon levő pontok adatait tartalmazza. Először tehát interpoláljunk v irányban állandó u_i mellett ($0 \leq i \leq n$) és foglaljuk össze e görbéket egy sorvektorban:

$$[\bar{G}(u_0, v), \bar{G}(u_1, v), \dots, \bar{G}(u_i, v), \dots, \bar{G}(u_n, v)] = \underline{v}^T \underline{A} \underline{P}^T$$

A felületet ezután úgy kapjuk, hogy a $\bar{G}(u_i, v)$ görbét interpoláljuk u irányban:

$$(25) \quad \bar{F}(u, v) = \underline{u}^T \underline{A} \begin{bmatrix} \bar{G}(u_0, v) \\ \bar{G}(u_1, v) \\ \vdots \\ \bar{G}(u_i, v) \\ \vdots \\ \bar{G}(u_n, v) \end{bmatrix} = \underline{u}^T \underline{A} (\underline{v}^T \underline{A} \underline{P}^T)^T = \underline{u}^T \underline{A} \underline{P} \underline{A}^T \underline{v}$$

vagy a szorzat-transzponálás szabályát figyelembe véve

$$(25) \quad F(u, v) = \underline{u}^T \underline{A} \underline{P} \underline{A}^T \underline{v}$$

A (25) kifejezés igen általános és áttekinthető, ugyanakkor numerikus számításokhoz is igen jól használható. A benne szereplő \underline{A} módszerjellemző mátrix helyébe az \underline{L} , \underline{T} , \underline{H} mátrixokat téve a Lagrange, Taylor, Hermite módszerrel interpolált felület egyenletéhez jutunk. A levezetésből az is kitűnik, hogy az u és v irányban való interpoláláshoz nem kell szükségképpen azonos módszert használni. A "vegyes" pl. Lagrange-Hermite interpoláció esetén a felület egyenlete a következő:

$$\bar{F}(u, v) = \underline{u}^T \underline{L} \underline{P} \underline{H}^T \underline{v}$$

A felületegyenletekben szereplő \underline{P} mátrix a felületet definiáló adatokat tartalmazza. Mérete az \underline{u} ill. \underline{v} vektorokban szereplő u és v paraméterek legmagasabb fokszámától vagyis a súlyfüggvényeket leíró polinomok fokszámától függ. Harmadfoku polinomok használatkor tehát \underline{P} 4×4 -es mátrix.

A Lagrange interpolációnál \underline{P} a $4 \times 4 = 16$ térbeli pont koordinátáit tartalmazza. Hermite interpolációnál (harmadfoku súlyfüggvénnyel) \underline{P} a következő mátrix:

$$(26) \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}(0,0) & \bar{P}(0,1) & \bar{P}_v(0,0) & \bar{P}_v(0,1) \\ \bar{P}(1,0) & \bar{P}(1,1) & \bar{P}_v(1,0) & \bar{P}_v(1,1) \\ \bar{P}_u(0,0) & \bar{P}_u(0,1) & \bar{P}_{uv}(0,0) & \bar{P}_{uv}(0,1) \\ \bar{P}_u(1,0) & \bar{P}_u(1,1) & \bar{P}_{uv}(1,0) & \bar{P}_{uv}(1,1) \end{bmatrix}$$

ahol a deriváltakat a következőképp jelöltük:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial u} = \bar{P}_u \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial v} = \bar{P}_v \quad \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial u \partial v} = \bar{P}_{uv}$$

A Hermite-módszer nagy előnye, hogy a \underline{P} mátrix közvetlenül azokat az adatokat tartalmazza, amelyek elemi felületek folytonos egymáshoz kapcsolásához kellene. Problémát jelent viszont a \bar{P}_{uv} vegyes parciális deriváltak, az u.n. csavarási vektorok jelenléte, mert közvetlen információval ezekről ritkán rendelkezünk. Ezért sok esetben az lehet a célszerű eljárás, hogy valamilyen görbe-approximációs vagy interpolációs módszerrel meghatározzuk a $\bar{P}_u, \bar{P}_v, \bar{P}_{uv}$ vektorokat az elemi felületek sarokpontjaiban, e felületek illesztését pedig a Hermite-alak segítségével végezzük el.

A felületapproximációs módszereket is a megfelelő görbe-approximációkból vezethetjük le. Így az $(n+1)(m+1)$ pont által meghatározott Bezier-felület egyenlete (11) ill. (12) általánosításaként adódik:

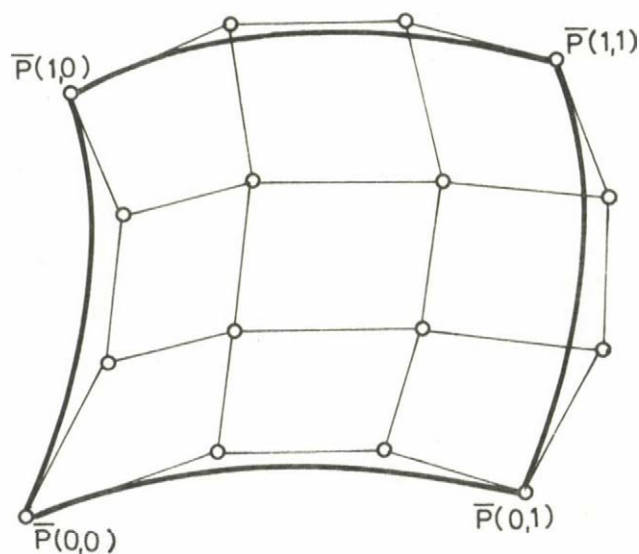
$$\bar{F}(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \binom{m}{j} v^j (1-v)^{m-j} \bar{P} \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{m} \right)$$

vagy a (25) egyenletnek megfelelő formában:

$$(27) \quad \bar{F}(u,v) = \underline{u}^T \underline{Z} \underline{P} \underline{Z}^T \underline{v}$$

ahol \underline{P} a pontok koordinátáit tartalmazó mátrix,
 \underline{Z} pedig $(n+1) \cdot (m+1)$ -es Bezier-mátrix ($n=3, m=3$
 esetére, ld. a (13) egyenletet).

A Bezier felület tulajdonságai is természetesen a
 Bezier görbék jellegzetességeinek felületre vonatkozó
 általánosításai. (18. ábra)

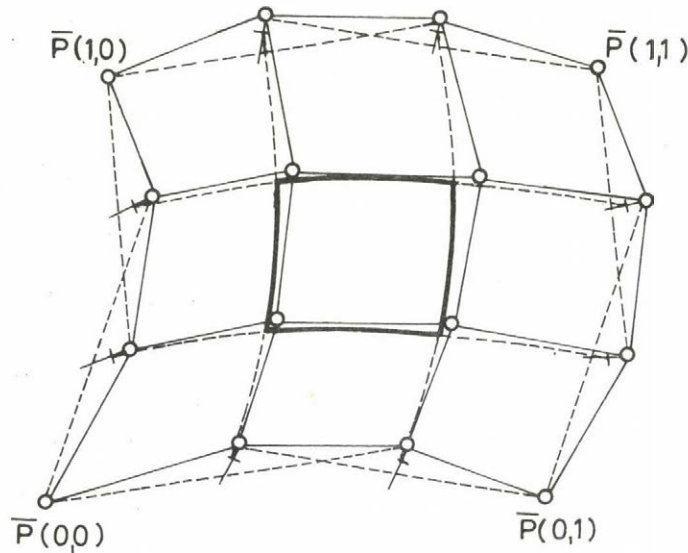


18. ábra

B-spline felületek egyenletét a (15) B-spline görbére vonatkozó egyenlethől származtathatjuk. Egy felületelemet $4 \times 4 = 16$ térbeli pont határoz meg harmadfoku spline súlyfüggvények esetén: (19. ábra)

(28)

$$\bar{F}(u,v) = \underline{u}^T \underline{B} \underline{P} \underline{B}^T \underline{v}$$



19 ábra.

ahol a B-spline mátrix azonos a (15) egyenletben szereplővel.

Az egész felület ilyen felületelemekből tevődik össze és ezek egymáshoz másodrendben folytonosan kapcsolódnak. A B-spline felület is rendelkezik a B-spline görbék előnyös tulajdonságaival (konvergencia, simaság, lokális jelleg). A geometriai tervezés szempontjából különösen előnyös, hogy e módszerrel a görbült felületen belüli vagy ahhoz csatlakozó síkok, élek, törésvonalak is flexibilis módon leírhatók.

A (22) görbedefiniáló egyenletet a következő tömör formában is megfogalmazhatjuk:

$$\bar{G}(u) = \Phi[\bar{P}^{(r)}(u_i)]$$

Összevetve ezen egyenletet a (22) eredeti alakkal megállapíthatjuk, hogy a Φ operátor a $\bar{P}^{(r)}(u_i)$ görbeadatoknak a megfelelő $s_{r,i}(u)$ súlyfüggvényekkel való szorzását, valamint ezen szorzatoknak az összes r -re ($0 \leq r \leq N$) és az összes i -re ($0 \leq i \leq n$) való összegezését jelenti.

Hasonlóképpen a (23) felületleíró egyenlet két operátor szorzata segítségével fejezhető ki;

$$(29) \quad \bar{F}(u,v) = \Phi \Psi[\bar{P}^{(r,q)}(u_i, v_j)]$$

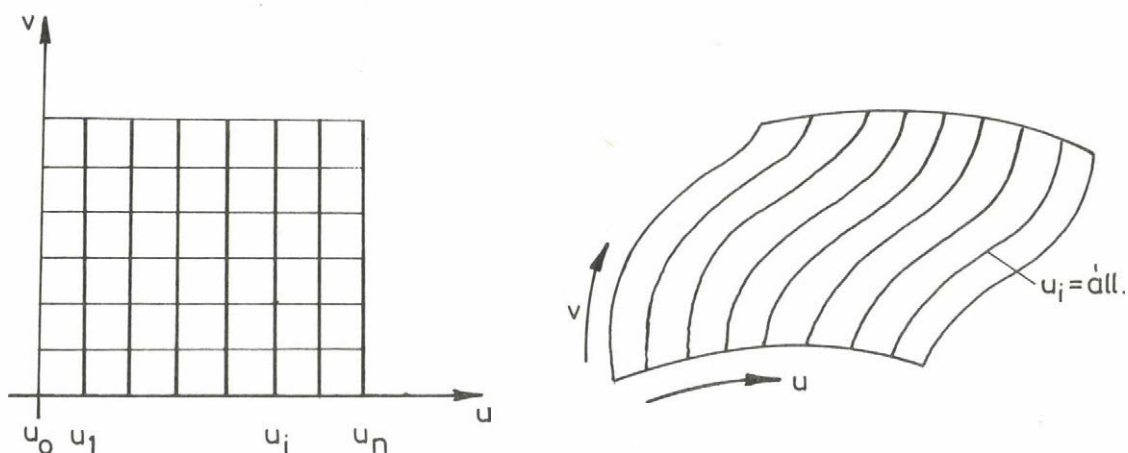
ahol a Ψ operátor az $s_{q,j}(v)$ súlyfüggvényekkel való szorzást és a q és j indexek szerinti összege-
zést jelenti.

Az egyes interpoláló és approximáló módszerek ezek után a Φ és Ψ operátorokban szereplő súlyfüggvények konkrét alakjában különböznek egymástól; a Lagrange, Hermite, Taylor, Bezier, B-spline módszereknél Φ helyébe $\Phi_L, \Phi_H, \Phi_Z, \Phi_B$ ill. $\Psi_L, \Psi_H, \Psi_T, \Psi_Z, \Psi_B$ kerül.)

2.3.2 Felület illesztése görbeseregekre

A felülettervezés gyakorlatában gyakran előfordul, hogy egy felületet nem diszkrét pontok és itt megadott deriváltértékek definiálnak, hanem különböző követelményeket kielégítő felületeket kell előre megadott görbékre simítani. E feladatot is megoldhatjuk az előző fejezetben leírtak általánosításával.

Legyenek tehát megadva a v paraméterű $\bar{P}(u_i, v)$ térbeli görbék. Mindegyik görbe egy-egy előre rögzített $u = u_i$ paraméterértékhez tartozik, tehát az $[uv]$ paramétersík $u_i = \text{állandó}$ egyenesének leképezése a térben (20. ábra).



20. ábra

A görbék definiálása történhet az előző fejezetekben leírt módon is, de attól eltérően is. pl. $z = f(x, y)$ függvénykapcsolattal.

Feladatunk ezután a $\bar{P}(u_i, v)$ görbék tartalmazó felület előállítás, vagyis a $\bar{P}(u_i, v)$ görbék interpolálása.

Az interpolációt a már tárgyalt elvek szerint végezve:

$$(30) \quad \bar{F}(u, v) = \sum_{i=0}^N s_i(u) \bar{P}(u_i, v)$$

és az $\bar{F}(u_i, v) = \bar{P}_i(u_i, v)$ feltétel teljesüléséhez szükséges, hogy

$$s_i(u_k) = \delta_{ik}$$

vagyis az $s_i(u)$ függvények a Lagrange-féle súlyfüggvények legyenek.

A (30) egyenletet a már bevezetett jelölésekkel operátoros formában így írhatjuk:

$$\bar{F}(u, v) = \phi_L[\bar{P}(u_i, v)]$$

Ha a megadott görbék mentén a felület u irányu deriváltjait leíró vektor-függvények $\bar{P}^{(r)}(u_i, v)$ is adva vannak, akkor az általános Hermite-módszert használhatjuk:

$$(31) \quad \bar{F}(u, v) = \phi_H[\bar{P}^{(r)}(u_i, v)]$$

Hasonló módon írhatjuk fel az adott görbék Bezier vagy B-spline módszerrel approximáló felületek egyenletét is:

$$\bar{F}(u, v) = \phi_Z[\bar{P}(u_i, v)] ; \quad \bar{F}(u, v) = \phi[\bar{P}(u_i, v)]$$

megjegyezzük azonban, hogy - mivel a felület ekkor nem tartalmazza az előírt görbéket - az approximációnak itt kisebb jelentősége van.

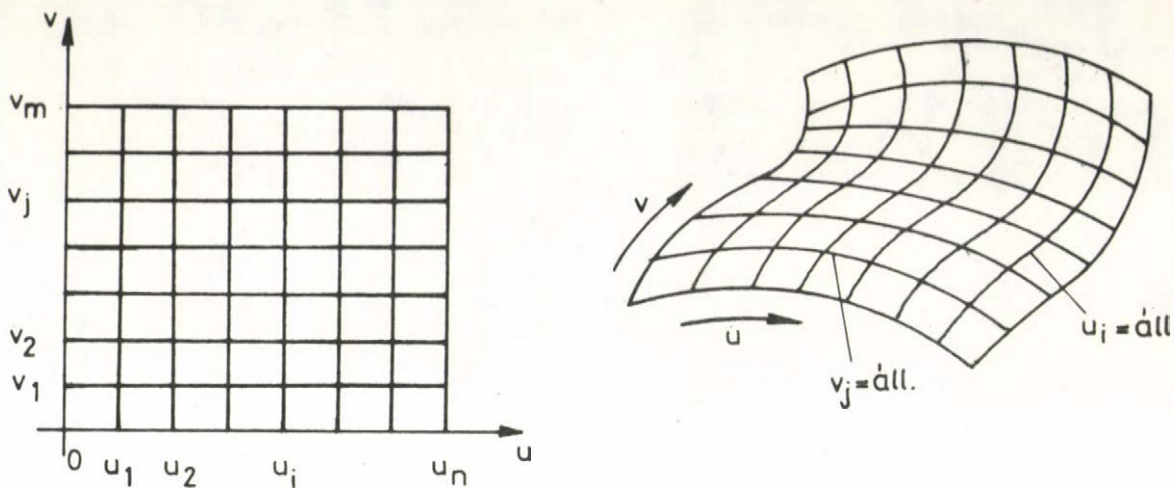
A $\bar{P}(u_i, v)$ görbék igen sok esetben síkgörbék; a leírni kívánt felület általában párhuzamos síkokkal való síkmetszetei (pl. hajótestek, repülőgép-felületek tervezése). E síkokban a görbéket sokszor egyszerű vonalakból lehet összerakni, vagy egy-egy speciális tervezési feladathoz régebben kifejlesztett függvényekkel lehet leírni ("hajótest-leíró függvény"). Ez esetben a görbéket először a metszősík helyzetének megfelelően a térbe helyezzük, majd ezután a felületet a fenti interpolációs módszerek valamelyikével állítjuk elő.

2.3.3 Transzfinit felületek

Az előző fejezetben tárgyalt felület-illesztési módszer akkor használható, ha előre megadott görbék által az egyik koordinátairányban jól ismerjük a felületet. A tervezési gyakorlatban azonban előfordul az az eset is, hogy két felületen futó görbesereg van megadva és a két görbeseregre kell illeszteni a felületet.

Legyenek adva tehát a $\bar{P}(u_i, v)$ $u_i = \text{állandó}$
 $0 \leq i \leq n$ és a $\bar{P}(u, v_j)$ $v_j = \text{állandó}$
 $0 \leq j \leq m$ térbeli görbék (21. ábra), és írjuk fel a görbéket tartalmazó felület egyenletét, amely tehát kielégíti a következő feltételeket:

$$(32) \quad \begin{aligned} \bar{F}(u_i, v) &= \bar{P}(u_i, v) \\ \bar{F}(u, v_j) &= \bar{P}(u, v_j) \end{aligned}$$



21. ábra.

A (31) egyenlettel leírt felület tartalmazza a $\bar{P}(u_i, v)$ görbéket. A $\bar{P}(u, v_j)$ görbéket tartalmazó felület egyenlete hasonlóképpen:

$$(33) \quad \bar{F}(u, v) = \Psi_L [\bar{P}(u, v_j)]$$

A mindkét görbesereget tartalmazó felület egyenlete (31) és (33) kombinálásával állítható elő:

$$(34) \quad \bar{F}(u, v) = \Phi_L [\bar{P}(u_i, v)] + \Psi_L [\bar{P}(u, v_j)] - \Phi_L \Psi_L [\bar{P}(u_i, v_j)]$$

és itt az utolsó tag a pontok interpolációjával előállító felület.

A (34) felület súlyfüggvényekkel kifejezett alakja:

$$\bar{F}(u, v) = \sum_{i=0}^n s_i(u) \bar{P}(u_i, v) + \sum_{j=0}^m s_j(v) \bar{P}(u, v_j) \quad (35)$$

$$- \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m s_i(u) s_j(v) \bar{P}(u_i, v_j)$$

ahol a (32) kikötések miatt az $s_i(u), s_j(v)$ súlyfüggvények Lagrange-típusúak.

A (34) egyenletben használhatjuk a Hermite-operátort is, ha a fenti görbeseregek mellett a felületi deriváltak függvényei is ismertek:

$$\begin{aligned} \bar{F}(u, v) &= \Phi_H[\bar{P}(u_i, v)] + \Psi_H[\bar{P}(u, v_j)] - \Phi_H \Psi_H[\bar{P}(u_i, v_j)] = \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{r=0}^N s_{r,i}(u) \bar{P}^{(r)}(u_i, v) + \sum_{j=0}^m \sum_{q=0}^M s_{j,q}(v) \bar{P}^{(q)}(u, v_j) - \\ &- \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{r=0}^N \sum_{q=0}^M s_{r,i}(u) s_{j,q}(v) \bar{P}^{(r,q)}(u_i, v_j) \end{aligned} \quad (36)$$

és itt $s_{r,i}, s_{j,q}$ a Hermite súlyfüggvények.

A kétirányu görbeseregre interpolált (35), (36) felületeket transzfinit felületeknek nevezzük.

A Hermite-módszerrel interpolált transzfinit felület speciális esete, amikor is $n = 1$ és $m = 1$ valamint $N = 1$ és $M = 1$ a felülettervezésben jól bevált Coons felület:

$$(37) \quad \begin{aligned} \bar{F}(u, v) = & \sum_{i=0}^1 \sum_{r=0}^1 s_{r,i}(u) \bar{P}(r, 0) + \sum_{j=0}^1 \sum_{q=0}^1 s_{q,j}(v) \bar{P}(0, q) - \\ & - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{r=0}^1 \sum_{q=0}^1 s_{r,i}(u) s_{q,j}(v) \bar{P}^{(r,q)}(u_i, v_j) \end{aligned}$$

A (37) Coons felület tehát interpolálja a $P(0, v)$ $\bar{P}(1, v)$ valamint a $\bar{P}(u, 0)$, $\bar{P}(u, 1)$ peremgörbékét és a

$$\left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial u} \right)_{(0, v)} = \bar{P}_u(0, v), \quad \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial u} \right)_{(1, v)} = \bar{P}_u(1, v)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial v} \right)_{(u, 0)} = P_v(u, 0),$$

$$\left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial v} \right)_{(u, 1)} = \bar{P}_v(u, 1)$$

érintőket.

A (37) felületleíró egyenletet áttekinthetőbb formában kapjuk, ha vektor-mátrixos írásmódot használunk:

$$\bar{F}(u,v) = [s_{o,o}(u), s_{o,1}(u), s_{1,o}(u), s_{1,1}(u)] \begin{bmatrix} \bar{P}(o,v) \\ \bar{P}(1,v) \\ \bar{P}_u(o,v) \\ \bar{P}_u(1,v) \end{bmatrix} + [s_{o,o}(v), s_{o,1}(v), s_{1,o}(v), s_{1,1}(v)] \begin{bmatrix} \bar{P}(u,o) \\ \bar{P}(u,1) \\ \bar{P}_v(u,o) \\ \bar{P}_v(u,1) \end{bmatrix} -$$

$$- [s_{o,o}(u), s_{o,1}(u), s_{1,o}(u), s_{1,1}(u)] \begin{bmatrix} \bar{P}(o,o) & \bar{P}(o,1) & \bar{P}_v(o,o) & \bar{P}_v(o,1) \\ \bar{P}(1,o) & \bar{P}(1,1) & \bar{P}_v(1,o) & \bar{P}_v(1,1) \\ \bar{P}_u(o,o) & \bar{P}_u(o,1) & \bar{P}_{u,v}(o,o) & \bar{P}_{u,v}(o,1) \\ \bar{P}_u(1,o) & \bar{P}_u(1,1) & \bar{P}_{u,v}(1,o) & \bar{P}_{u,v}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{o,o}(v) \\ s_{o,1}(v) \\ s_{1,o}(v) \\ s_{1,1}(v) \end{bmatrix}$$

az illesztés létrejöttéhez pedig a súlyfüggvényeknek ki kell elégíteni az

$$\left. \begin{array}{l} s_{r,i}^{(p)(u_k)} \\ s_{r,i}^{(p)(v_k)} \end{array} \right\} = \delta_{p,r} \delta_{i,k}$$

feltételt. Ilyen feltételt kielégítő súlyfüggvényeket adtunk meg a 2.2.2 fejezetben (8) alatt.

A felület leírására szolgáló matematikai módszereket áttekintve megállapíthatjuk, hogy a legtöbb előre megadott adatot tartalmazzák és így a legpontosabb leírást nyújtják az

$$\bar{F}(u,v) = (\phi + \psi - \phi \psi)[\bar{P}(u,v)]$$

tipusu u.n. transzfinit felületek, hiszen itt két előre megadott görbesereget tartalmaz a felület. Egy görbeseregire simított felületet írunk le az

$$\bar{F}(u,v) = \phi[\bar{P}(u_1,v)] \quad \text{vagy} \quad \bar{F}(u,v) = \psi[\bar{P}(u,v_j)]$$

tipusu egyenletek, míg az

$$\bar{F}(u,v) = \phi \psi[\bar{P}(u_1,v_j)]$$

egyenlettel megadott felület diszkrét térbeli pontokhoz tartozó adatokat interpolál ill. approximál. E módszerek közti választást tehát elsősorban a rendelkezésre álló adatok mennyisége, jellege határozza

meg. A három módszeren belül pedig a Φ és Ψ operátorok megválasztása - az adatok adta lehetőségen belül - elsősorban a leírni kívánt felület sajátságaitól függ.

2.4 Geometriai számítások felületekkel

2.4.1 Érintő, normális, burkolófelület számítása

Az $\bar{F}(u,v)$ egyenlettel definiált felület $\bar{F}_0(u_0,v_0)$ pontbeli érintői az u,v paraméerváltozások irányában

$$(38) \quad \bar{e}_u = \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} = \bar{F}_u(u_0, v_0); \quad \bar{e}_v = \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial v} \right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} = \bar{F}_v(u_0, v_0)$$

A felületen olymódon definiálhatunk egy görbét, hogy az u és v változók között függvénykapcsolatot adunk meg: $u = u(t)$ $v = v(t)$ vagyis az $[uv]$ sík egy görbéjét képezzük le a felületre:

$$\bar{F}(t) = F(u(t), v(t))$$

E görbének érintője a $t=t_0$ paraméterű pontban:

$$\begin{aligned}
 \bar{e} &= \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \right)_{t=t_0} = \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \right)_{\substack{u=u(t_0) \\ v=v(t_0)}} + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial v} \right)_{\substack{u=u(t_0) \\ v=v(t_0)}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{t=t_0} = \\
 (39) \quad &= \bar{e}_u \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t_0} + \bar{e}_v \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{t_0}
 \end{aligned}$$

A felületi normális merőleges az \bar{e}_u , \bar{e}_v vektorokra, tehát

$$(40) \quad \bar{n} = \bar{e}_u \times \bar{e}_v = [\bar{F}_u \times \bar{F}_v]$$

az \bar{F}_0 pontbeli érintősíki egyenlete pedig ezzel:

$$\bar{n}(\bar{r} - \bar{F}_0) = 0$$

Alkalmazásokban gyakran van szükség a felülettel adott (d) távolságban haladó burkolófelület egyenletére. Ezt a következőképpen kapjuk a kiinduló felület és a d távolság ismeretében:

$$(41) \quad \bar{F}_b(u, v) = \bar{F}(u, v) + d \bar{n}_e(u, v) = \bar{F}(u, v) + d \frac{\frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{F}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} \right|}$$

ahol \bar{n}_e a normális irányu egységvektor. Itt nehézséget okoz \bar{n}_e bonyolult alakja (u-ban, v-ben törtfüggvény), valamint az, hogy számlálójára és nevezőjére u és v magasabb fokszámait tartalmazza, mint $\bar{F}(u, v)$.

Tekintsük ugyanis a felület egyenletét polinomiális
súlyfüggvények esetén:

$$\bar{F}(u, v) = \underline{u}^T \underline{A} \underline{P} \underline{A}^T \underline{v} = (\underline{u}^T \underline{A} \underline{P}_x \underline{A}^T \underline{v}) \bar{i} + \\ (\underline{u}^T \underline{A} \underline{P}_y \underline{A}^T \underline{v}) \bar{j} + (\underline{u}^T \underline{A} \underline{P}_z \underline{A}^T \underline{v}) \bar{k}$$

ahol \underline{A} valamely interpoláció v. approximáció matri-
xája.

Jelöljük továbbá az \underline{u} vektor u változó szerint,
valamint a \underline{v} -vektor v szerinti deriváltját vessző-
vel. Harmadfoku polinomok esetén:

$$\underline{u}^T = [u^3, u^2, u, 1] \quad \underline{v}^T = [v^3, v^2, v, 1] \\ \underline{u}^{T'} = [3u^2, 2u, 1, 0] \quad \underline{v}^{T'} = [3v^2, 2v, 1, 0]$$

és vezessük be a deriválás szempontjából állandó

$$\underline{A} \underline{P}_x \underline{A}^T = \underline{Q}_x ; \quad \underline{A} \underline{P}_y \underline{A}^T = \underline{Q}_y ; \quad \underline{A} \underline{P}_z \underline{A}^T = \underline{Q}_z$$

mátrixokat. E jelölésekkel az érintővektorok

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial u} = (\underline{u}^{T'} \underline{Q}_x \underline{v}) \bar{i} + (\underline{u}^{T'} \underline{Q}_y \underline{v}) \bar{j} + (\underline{u}^{T'} \underline{Q}_z \underline{v}) \bar{k} \\ (42) \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} = (\underline{u}^T \underline{Q}_x \underline{v}') \bar{i} + (\underline{u}^T \underline{Q}_y \underline{v}') \bar{j} + (\underline{u}^T \underline{Q}_z \underline{v}') \bar{k}$$

A normális komponenseit (40) értelmében a következő egyenlőségek adják:

$$\bar{n} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} = \bar{n}_x \bar{i} + \bar{n}_y \bar{j} + \bar{n}_z \bar{k}$$

(43)

$$\bar{n}_x = \underline{u}^{T'} \underline{Q}_y \underline{v} \underline{u}^T \underline{Q}_z \underline{v}' - \underline{u}^{T'} \underline{Q}_z \underline{v} \underline{u}^T \underline{Q}_y \underline{v}'$$

$$\bar{n}_y = \underline{u}^{T'} \underline{Q}_z \underline{v} \underline{u}^T \underline{Q}_x \underline{v}' - \underline{u}^{T'} \underline{Q}_x \underline{v} \underline{u}^T \underline{Q}_z \underline{v}'$$

$$\bar{n}_z = \underline{u}^{T'} \underline{Q}_x \underline{v} \underline{u}^T \underline{Q}_y \underline{v}' - \underline{u}^{T'} \underline{Q}_y \underline{v} \underline{u}^T \underline{Q}_x \underline{v}'$$

Látható tehát, hogy a normális-komponensek u -ban és v -ben ötödfoku polinomokat tartalmaznak.

Másrész viszont az $F_b(u,v)$ burkolófelület előállítására használhatjuk a már tárgyalt felület-interpolációs módszereket. Célunknak leginkább megfelel a Hermite-módszer, melynél a felületelemet definiáló adatok a (26) mátrix értelmében a sarokpontok, valamint itt az u és v szerinti deriváltak és a vegyesderiváltak. Ezt a 16 adatot könnyen kiszámíthatjuk, ha a (41) egyenletbe a sarokpontok paramétereit: $[u,v] = 0,0; 0,1; 1,0; 1,1$ behelyettesítjük, illetve (41) u, v és uv szerinti deriváltjait ugyanezen paramétereknél kiszámítjuk. Az utóbbi esetben felhasználhatjuk a (42), (43) összefüggéseket. Ha mindezen deriválásokat és helyettesítéseket elvégeztük, felírhatjuk a felületdefiniáló mátrixot:

$$(44) \quad \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \bar{F}_b(0,0) & \bar{F}_b(0,1) & \left(\frac{\partial \bar{F}_b}{\partial v}\right)_{0,0} & \left(\frac{\partial \bar{F}_b}{\partial v}\right)_{0,1} \\ \bar{F}_b(1,0) & \bar{F}_b(1,1) & \left(\frac{\partial \bar{F}_b}{\partial v}\right)_{1,0} & \left(\frac{\partial \bar{F}_b}{\partial v}\right)_{1,1} \\ \left(\frac{\partial \bar{F}_b}{\partial u}\right)_{0,0} & \left(\frac{\partial \bar{F}_b}{\partial u}\right)_{0,1} & \left(\frac{\partial^2 \bar{F}_b}{\partial u \partial v}\right)_{0,0} & \left(\frac{\partial^2 \bar{F}_b}{\partial u \partial v}\right)_{0,1} \\ \left(\frac{\partial \bar{F}_b}{\partial u}\right)_{1,0} & \left(\frac{\partial \bar{F}_b}{\partial u}\right)_{1,1} & \left(\frac{\partial^2 \bar{F}_b}{\partial u \partial v}\right)_{1,0} & \left(\frac{\partial^2 \bar{F}_b}{\partial u \partial v}\right)_{1,1} \end{bmatrix}$$

Ezzel a burkolófelület:

$$\bar{F}_b(u,v) = \underline{u}^T \underline{H} \underline{P} \underline{H}^T \underline{v}$$

vagyis u -ban és v -ben harmadfoku lesz (miként $F(u,v)$). Ugyanakkor $F_b(u,v)$ (41) szerinti alakjából az is következik, hogy a burkolófelület-elemek folytonos érintővel való kapcsolódásához szükséges, hogy az eredeti $F(u,v)$ felület elemei első és - (43) deriválása miatt - másodrendben folytonosan kapcsolódjanak egymáshoz.

2.4.2 Metszetvonalak számítása

Szoborszerű felületek megmunkálásához sok esetben a felület és egy adott sík metszészvonalát kell előállítani.

Matematikailag a következőképp fogalmazhatjuk meg a feladatot: legyen adva az

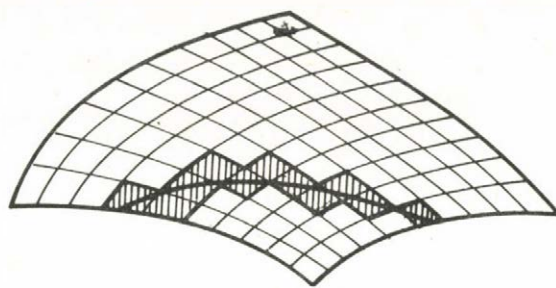
$$\bar{F}(u, v) = \underline{u}^T \underline{A} \underline{P} \underline{A}^T \underline{v} \quad \text{felület és az}$$

$$\bar{n}_s (\bar{r} - \bar{r}_0) = 0 \quad \text{sík,}$$

ahol a síkot \bar{n}_s normálvektorával és egy pontjával (\bar{r}_0) adtuk meg. A felület és a sík közös pontjaira fennáll:

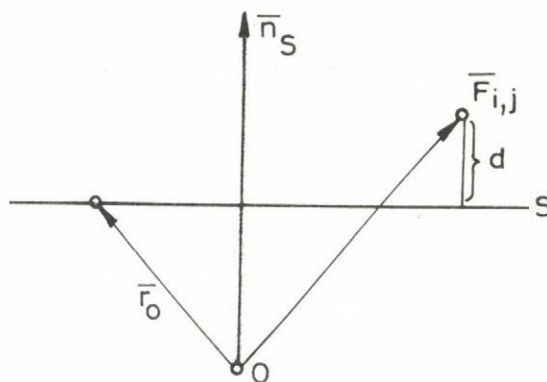
$$(45) \quad \bar{n}_s (\underline{u}^T \underline{A} \underline{P} \underline{A}^T \underline{v}) - \bar{n}_s \bar{r}_0 = 0$$

Ezen egyenlet összefüggést állapít meg u és v között. Ha tehát (45) segítségével u -t v függvényében kifejezzük: $u = u(v)$, és e függvényt $\bar{F}(u, v)$ -be helyezzük: $\bar{F}(u(v), v)$, akkor máris előállítottuk a metszetgörbe paraméteres (v) egyenletét. E matematikai műveletek tényleges elvégzése azonban nehézséget okoz. A (45) egyenletben u és v fokszáma a súlyfüggvényektől függ; láttuk, hogy általában kívánatos legalább harmadfoku súlyfüggvények használata, amikor is (45) u -ban és v -ben harmadfoku. Mivel ilyen egyenletből az $u(v)$ kapcsolatot explicite nem tudjuk meghatározni, ezért közelítő módszereket kell felhasználnunk a metszetgörbe pontjainak meghatározására. Tekintsünk tehát egy felületelemet és osszuk fel azt $u_i = \text{állandó}$, $v_j = \text{állandó}$ vonalakkal (22. ábra),



22. ábra.

valamint számítsuk ki e paramétervonalak metszéspontjainak: $\bar{F}(u_i, v_j) = \bar{F}_{i,j}$ az S síktól való távolságát (23. ábra).



23. ábra.

$$d_{ij} = (\bar{F}_{i,j} - \bar{r}_o) \frac{\bar{n}_s}{|\bar{n}_s|} =$$

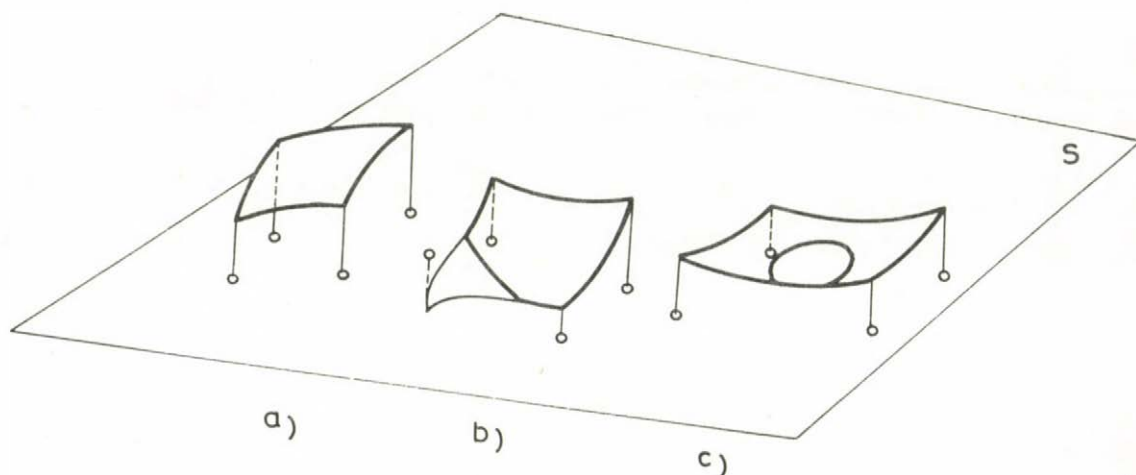
(46)

$$= \frac{[(\bar{F}_{i,j})_x - x_o]n_{sx} + [(\bar{F}_{i,j})_y - y_o]n_{sy} + [(\bar{F}_{i,j})_z - z_o]n_{sz}}{\sqrt{n_{sx}^2 + n_{sy}^2 + n_{sz}^2}}$$

Ezekután könnyen kiválaszthatjuk azokat a felületdarabokat, amelyek tartalmazzák a metszetgörbét. Ha

$$u_{i-1} \leq u \leq u_i ; v_{i-1} \leq v \leq v_i$$

felületdarab négy sarokpontjának távolsága a siktól azonos előjelű, akkor e felületdarab a sík fölött, vagy alatta helyezkedik el (24/a. ábra), ha pedig e távolságok különböző előjelűek, akkor a sík metszi e felületdarabot (24/b. ábra). Különleges eset áll elő, ha a felületdarab teljes egészében tartalmazza a metszetgörbét (24/c. ábra), amikor is mind a négy d_{ij} távolság azonos előjelű. Ilyenkor láthatóan túlságosan durva a felületelem felosztása a metszetgörbe méreteihez képest és a sík közel érintőleges a felülethez. Gyakorlati esetekben mindig rendelkezünk annyi előzetes információval a sík helyzetére ill. a felület alakjára vonatkozóan, hogy ezt az esetet biztonsággal kizárhassuk.

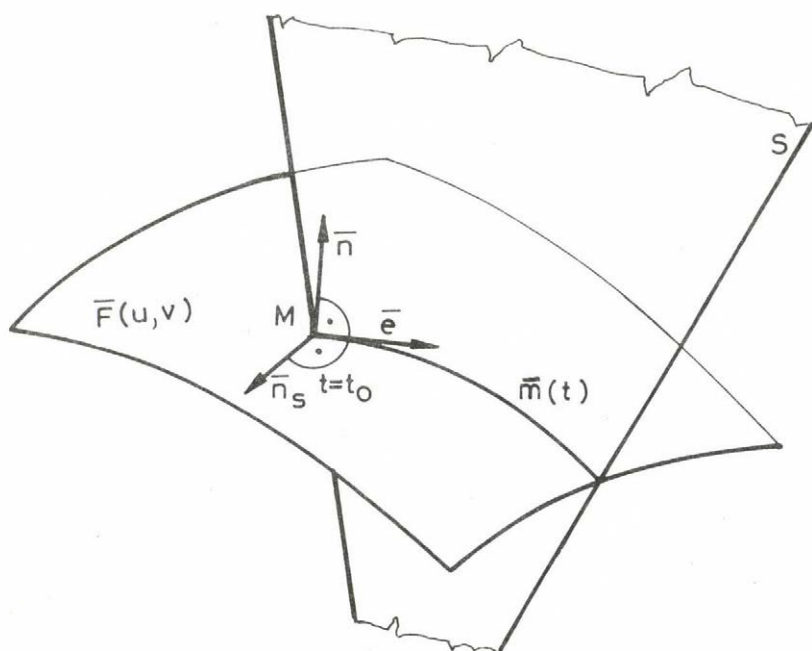


24. ábra

Miután előállítottuk a metszetgörbét tartalmazó felületdarabok halmazát, a metszetgörbét jó közelítéssel egyenesdarabokból állíthatjuk össze; ezen egyenesdarabok a sík és a felületdarab 3-3 pontja által meghatározott közelítő síkok metszészvonalai.

A fenti módszer - bár egyszerű aritmetikai műveletek segítségével - de a teljes felület bizonyos részletekkel történő átvizsgálását igényli. A következőkben tárgyalásra kerülő módszernél számításokat csak a metszetgörbe pontjaiban kell végeznünk, ezek azonban bonyolultabbak, mint az előbbi módszernél.

Tekintsük tehát az $m(t)$ metszetgörbe egy pontját (M) és itt az $\bar{F}(u,v)$ felület \bar{n} normálisát (25. ábra).



25. ábra.

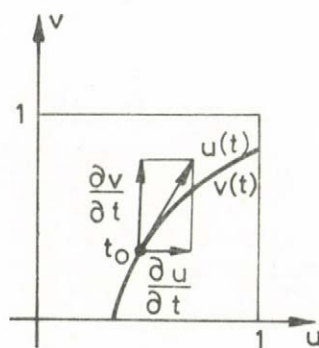
Az összes M ponton átmenő felületi görbe érintője e pontban merőleges az \bar{n} vektorra. Hasonlóképpen valamennyi síkban fekvő görbe érintővektorai merőlegesek a sík normálvektorára: \bar{n}_s -re. Ilymódon a metszetgörbe érintővektora (\bar{e}) az M pontban merőleges mindkét normálvektorra;

$$(47) \quad \bar{e} = \bar{n}_s \times \bar{n} = \bar{n}_s \times (\bar{F}_u \times \bar{F}_v)$$

A hármas vektorszorzat azonban így is írható;

$$(48) \quad \bar{e} = (\bar{n}_s \bar{F}_v) \bar{F}_u - (\bar{n}_s \bar{F}_u) \bar{F}_v$$

Vizsgáljuk ezekután a metszési viszonyokat az $[uv]$ paramétersíkban (26. ábra).



26. ábra

Itt a metszetgörbe leképezését az $u = u(t)$, $v = v(t)$ egyenletek állítják elő. Mivel a térbeli metszetgörbe végig a felületen halad;

$$\bar{m}(t) = \bar{F}(u(t) ; v(t))$$

és M pontbeli (t_0 paraméterértékhez tartozó) érintőjére (39) értelmében:

$$(49) \quad \bar{e} = \frac{d\bar{F}}{dt} = \bar{F}_u \frac{du}{dt} + \bar{F}_v \frac{dv}{dt}$$

A (48) és (49) egyenletek összevetésével adódik, hogy

$$\frac{du}{dt} = \bar{n}_s \bar{F}_v \quad ; \quad \frac{dv}{dt} = - \bar{n}_s \bar{F}_u$$

Mindezek felhasználásával az [uv] síkbeli metszetgörbe meredeksége a $t = t_0$ pontban:

$$(50) \quad \frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = - \frac{(\bar{n}_s \bar{F}_u)}{(\bar{n}_s \bar{F}_v)}$$

és ezen $\frac{dv}{du}$ irány felel meg a paramétersíkban a térbeli metszetgörbe \bar{M} pontbeli érintőjének (az \bar{e} vektornak).

Az $u = u_0$ $v = v_0$ pont ismeretében a metszetgörbe egy közeli pontjának paramétereit a következőképp számíthatjuk:

$$(51) \quad \begin{aligned} u_1 &= u_0 + \Delta u \\ v_1 &= v_0 + \frac{dv}{du} \Delta u \end{aligned}$$

vagyis felvesszük Δu értékét, majd az (51) egyenlet alapján és a deriváltat (50)-ből véve kiszámítjuk u_1 és v_1 értékét, a metszetgörbe következő pontjának paramétereit. Ha ez megtörtént, az $\bar{F}(u_1, v_1)$ leképezés adja a térbeli metszetgörbe következő pontját.

A módszer leírásából kitűnik, hogy a metszetgörbe pontjait közelítőleg kapjuk meg. Az $\bar{F}(u, v)$ leképzőfüggvény ismételt alkalmazása miatt, a pontok mind a felületen helyezkednek el, azonban a metszősíkra nem pontosan illeszkednek, mivel az $[uv]$ síkbeli görbe pontjait (51) szerint csak közelítőleg kapjuk. Az (51) összefüggés pontossága elvileg fokozható magasabb deriváltak figyelembevételével. Számítástechnikailag célszerűbbnek látszik azonban a metszéspontok siktól való távolságának állandó ellenőrzése a (46) összefüggés alapján és Δu értékének ettől függő megválasztása.

3. SZOBORSZERŰ FELÜLETEK MEGJELÉNÍTÉSÉNEK ÁLTALÁNOS ELVEI

E fejezetben térbeli felületek megjelenítésének néhány kérdését tárgyaljuk. Először vázoljuk, hogy a szoborszerű felületek ábrázolása milyen új követelményeket támaszt a hagyományos ábrázoláshoz képest, majd röviden összefoglaljuk a megjelenítés lehetséges módjait.

Az alkatrészek gyártásának alapfeltétele, hogy a megmunkálni kívánt testről megfelelő geometriai leírásunk legyen. A hagyományos géprajz a testet vetületeivel és/vagy méreteivel ábrázolja és alapvető törekvése a test egzakt geometriai definiálása, valamennyi méret pontos megadása. A műszaki gyakorlatban leginkább elterjedt testeket tulnyomórészt síklapok, illetve forgásfelületek határolják. Ennek oka a sík- és forgásfelületek aránylag egyszerű megmunkálásában rejlik. Ezek a testek a fent említett módszerrel könnyen leírhatók. Bonyolultabb térbeli alakzatok definiálása azonban ily módon nem oldható meg; ugyanis olyan nagy mennyiségű metszetre illetve méretre lenne szükség, hogy a géprajz legfőbb előnyét, a tömörséget veszítenénk el.

Szoborszerű testek tervezésénél csak bizonyos méreteket írunk elő és a tervezői intuícióna bizzuk, hogy az *interpolációs* ill. *approximációs módszerek*, (lásd. 2. fejezet) és az *interaktív technika* segítségével a test végleges geometriája kialakuljon. A fenti matematikai módszerek biztosítják az egzakt matematikai leírást, a felületelemek illeszkedését és megfelelő simaságát. Az esetek többségében azonban pusztán a matematikai modell alapján nehezen tudunk képet alkotni a felület pontos alakjáról, és a nem specifikált környezetben a felület viselkedéséről előre általában keveset tudunk. Ez teszi szükségessé az

interaktív, grafikus módszerek használatát, melyek segítségével lehetővé válik, hogy a folyamatos képszerű visszajelzés alapján a tervező addig módosítsa a geometriai modell paramétereit, míg az előzetesen elképzelt test elő nem áll.

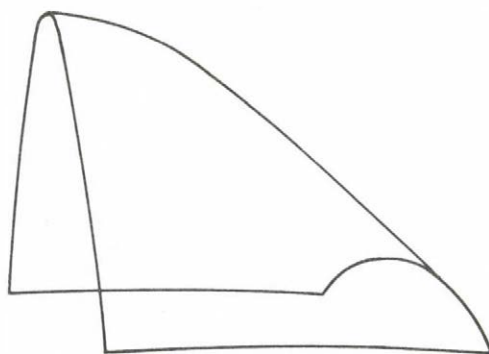
Ily módon a szoborszerű felületek szemléletes ábrázolása az interaktív tervezés lényeges előfeltétele.

3.1 Felületek ábrázolásának módjai

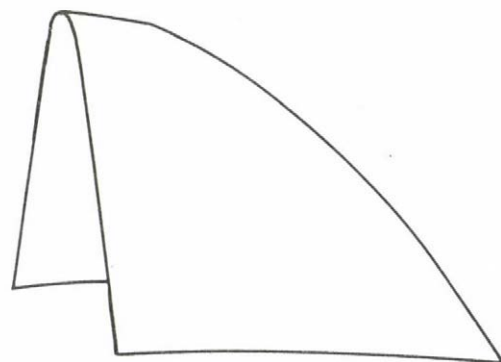
Az ábrázolás alapproblémája, hogy a háromdimenziós alakzatok megjelenítésére csupán kétdimenziós grafikus eszközök állnak rendelkezésre.

Elsőként tehát az a kérdés merül fel, hogy *m i t* jelenítsünk meg.

a.) Konturmodell - az ábrázolási forma lényege, hogy a test konturéleit jelenítjük meg (27. ábra).



Konturmodell



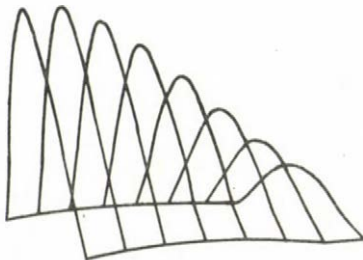
Takartvonalas konturmodell

27. ábra

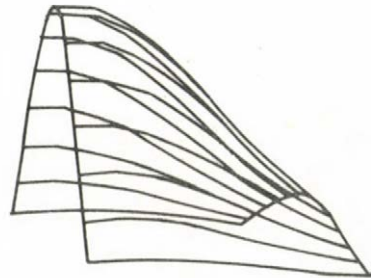
Ezen módszer hátránya, hogy nem elég képszerű és a felület görbületeit nem szemlélteti megfelelően, továbbá, hogy paraméteres felület definíciójánál a konturélek meghatározása számításigényes.

b.) *Paraméterháló* - az $F = F(u,v)$ alakban adott felület $u = \text{const.}$ és/vagy $v = \text{const.}$ térgörbéit jelenítjük meg (28. ábra).

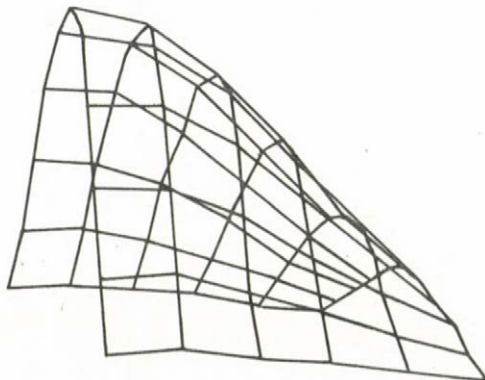
Szemléletes módszer; ha a túl sok görbe zavaró hatása, elegendő csak az egyik paraméter szerinti térgörbék megjeleníteni. A módszer fő előnye a gyorsaság. Interaktív rendszerekben jól használható.



$u=\text{áll.}$

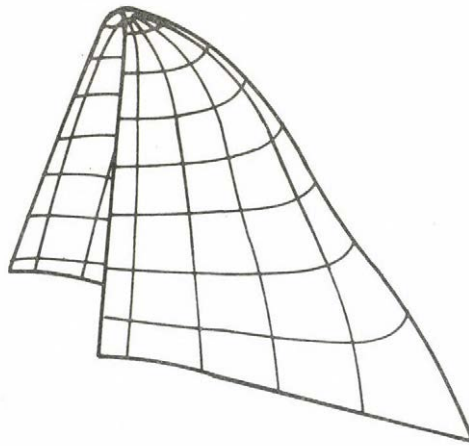


$v=\text{áll.}$



28. ábra

- c.) "x - y" háló - a felületnek az $x = \text{const.}$ és/vagy $y = \text{const.}$ síkokkal való metszetgörbéit jelenítjük meg. b.)-hez hasonlóan szemléletes módszer. Paraméteres leírás esetén a metszetek meghatározása számításigényes.
- d.) Szint - és esésvonal háló - a felület szint és esésvonalait, az u.n. geodétikus vonalakat jelenítjük meg (29. ábra).



29. ábra.

A szintvonalak a $z = \text{const.}$ síkokkal való metszetgörbék, míg az esésvonalak azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy egy adott pontban merőlegesek a felületi normálisra és a ponton átmenő szintvonalra.

3.2 Felületek megjelenítése 2D-ben

A továbbiakban a "hogyan jelenítsük meg" kérdését vizsgáljuk.

A tervezés elengedhetetlen feltétele, hogy a tervező onnan nézhesse meg a létrehozott testet, ahonnan akarja, azaz szabadon válszthassa meg a *nézőpontot*.

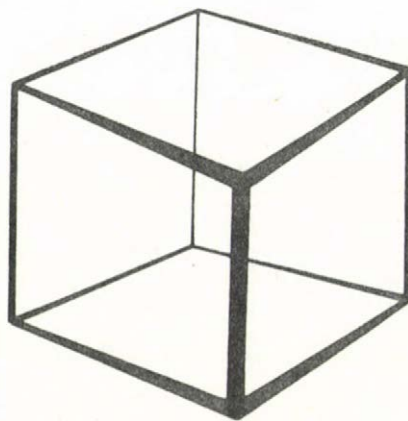
A megjelenítendő ábrát úgy kapjuk, hogy az előzőleg leírt "mit" pontjait valamilyen módon egy képsíkra vetítjük (*perspektív projekció*).

Ha el akarjuk kerülni a perspektív torzulásokat, úgy végtelen távoli nézőpontot választva *orthogonális projekciót* hajtunk végre.

A perspektív projekció helyett gyakran alkalmazzák az axonometrikus ábrázolási módot, mely kevésbé szemléletes, de egyszerűbb.

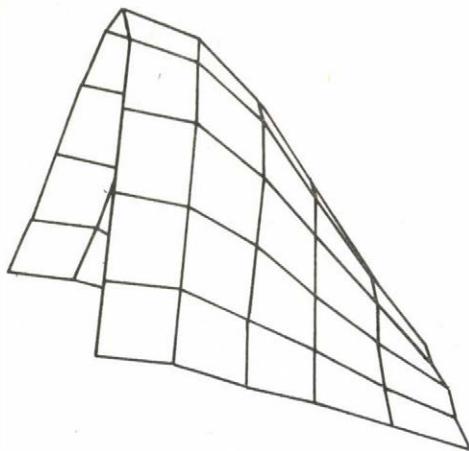
A továbbiakban néhány speciális ábrázolási formát vizsgálunk. Valamennyinek közös vonása, hogy az ábra térszerűségét, áttekinthetőségét növelik.

A *mélységmodulációs* eljárások a nézőponttól távolabb eső vonalakat kisebb intenzitással jelenítik meg és általában speciális hardware segítségével realizálhatók (30. ábra).



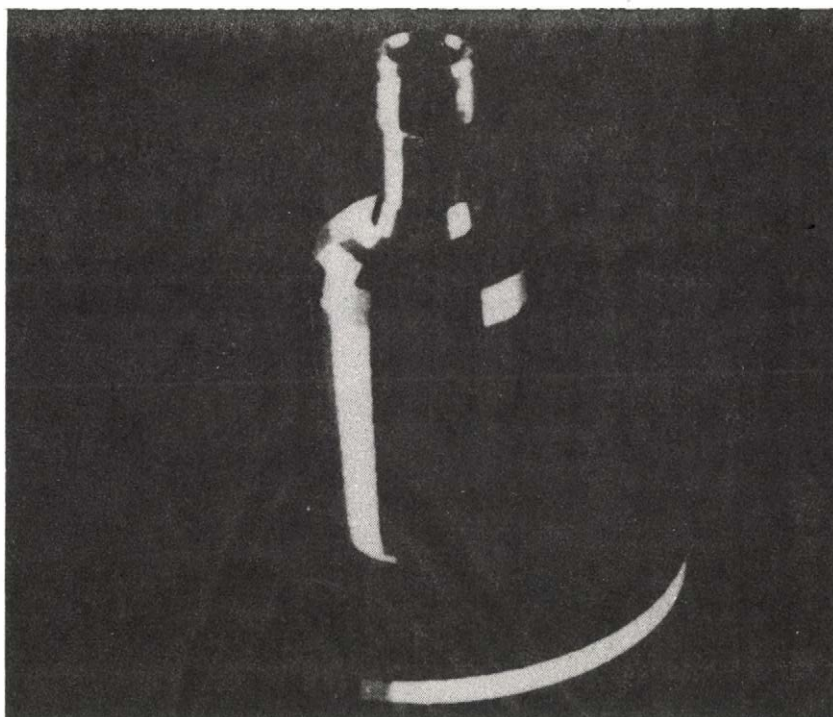
30. ábra.

A *takartvonalas* ábrázolás feloldja a hálós rajzok kuszaságát. Az ábra generálása elég időigényes, így interaktív tervezésnél csak a leíró fázisban célszerű használni (31. ábra)



31. ábra

A mélységérzetet növelik az *árnyékoló* eljárások, amelyek TV -szerű raster-scan display-n jól alkalmazhatók (32. ábra).



32. ábra

A térhatást még jobban növeli ha *sztereó* képet hozunk létre. Többféle eljárás ismeretes, általában valamilyen speciális eszközre van szükség, - pl. piros - zöld szemüveg, periszkóp stb.

4. TECHNOLÓGIAI KÉRDÉSEK SZOBORSZERŰ FELÜLETEK MEGMUNKÁLÁSÁNÁL

4.1 A technológiai tervezés általános szempontjai

A szoborszerű felületekkel rendelkező bonyolult munkadarabokat olyan NC marógépekkel lehet megmunkálni, amelyek pályamenti elmozdulásra képesek. A bonyolult pálya mentén történő elmozdulás a szerszámgép koordinátatengelyeinek irányába történő elmozdulásból és az egyes tengelyekkel párhuzamos tengely körüli elfordulásokból állhat össze. A szerszámgép azon mozgáslehetőségeinek száma, amelyek a pályavezérlés során egymással függvénykapcsolatban lehetnek, a dimenziószám (D). A munkadarabok megmunkálhatóságát nagyrészt a szerszámgép dimenziószáma dönti el.

A $2 \frac{1}{2} D$ NC marógép a szerszámgép valamely mozgásirányában szakaszvezérlésre, az aramerőleges síkban pályavazérlésre képes. A felület megmunkálása csak a pályavezérlés síkjával párhuzamos síkmetszet-konturok mentén történhet, amely geometriai és technológiai szempontból is hátrányos. A szerszámtengely nem dönthető, ezért csak olyan felületek munkálthatók meg, amelyeknek a szerszámtengely felől nézve nincsenek takart részeik (különleges szerszámmal egy kissé alá lehet menni a takart felületnek). Az állandó helyzetű szerszámtengely és a kötött mozgáspálya megköveteli a kis termelékenységű, de egyetemes forgácsolóképeségű gömb vagy gömbjellegű szerszámok alkalmazását.

A kötött mozgáspálya következtében a forgácsolási körülmények (a szerszám és a munkadarab érintkezési pontja, ráhagyás, felület meredeksége, görbülete) jelentősen változhat-

nak, ami rontja a megmunkálási pontosságot, felületi minőséget, szerszámfelhasználást és növeli a megmunkálás időszükségletét.

3D NC marógép általában a három koordinátatengely irányában képes pályavezérlésre, azaz a szerszám csucsát (referenciapontját) képes bármely térbeli görbén vezérelni. Az állandó helyzetű szerszámtengelyből eredő, a megmunkálható felületekkel és az egytetemes szerszámmal kapcsolatos hátrányok itt is jelentkeznek, de a szerszám gép nyújtotta térbeli megmunkálási lehetőség alapján egyes munkadaraboknál esetleg választhatunk olyan mozgáspályát, amely mentén a forgácsolás körülményei nem változnak jelentősen.

4D NC marógép lehetőségei egy vezérelt munkadarabforgatással bővülnek, ami jelentős könnyedséget adhat közelítőleg forgásszimmetrikus munkadarabok megmunkálásához, de az állandó helyzetű szerszámtengelyből eredő hátrányok részben még itt is fennállnak.

5D NC marógépek már képesek a szerszámtengely állásszögének vezérelt változtatására is, ami a technológiai lehetőségek ugrásszerű javulását eredményezi. 5D megmunkálásánál megmunkálható minden olyan felület, amelyhez hozzáfér a szerszám. Ezzel lehetővé válik belső zsákszerű felületek és külső csavarodott felületek (pl. áramlástechnikai gépek járókerekeinek csavart lapátjai) megmunkálása is. Technológiai szempontból jelentős javulást eredményez az, hogy domboru felületek megmunkálhatók egyenes alkotóju, nagy termelékenységű marókkal úgy, hogy az egyes szinteken mindig a felület állásának megfelelően döntik meg a szerszámot. Homoru felületeknél pedig megoldható - ha nem okoz ütközési problémát -, hogy a szerszámtengelyt a megfelelő szögben megdöntve állandóan a szerszám kedvező részén forgácsoljunk, ami a termelékenység és a szerszámfelhasználás javulását eredményezi.

Az adott gép behatárolja a megmunkálás lehetőségeit. A technológia tervezésekor alapvetően két szempontot kell figyelembe venni. A technológiának mindenekelőtt azt kell biztosítania, hogy a munkadarab az előirt minőségben készüljön el, de azokon a helyeken, ahol a tervezés folyamán több választási lehetőség adódik, törekedni kell a megmunkálás valamely szempontból optimális végrehajtására.

A munkadarab megfelelő minőségű elkészítésén az előirt

- alakpontosság,
- méretpontosság,
- felületi minőség betartását értjük.

A megmunkálógépet, a munkadarab felfogását, a forgácsolás stratégiáját, szerszámait és technológiai adatait úgy kell megválasztani, hogy ez a hármas követelmény betartható legyen.

A fenti követelmények betartásán túl a technológiai változatok közötti döntést előre kijelölt optimum kritériumok alapján kell elvégezni. Normális körülmények között a minimális költségre való törekvés a természetes, de elképzelhető még a minimális gépidőre, illetve (importból is nehezen beszerezhető) szerszámok minimális felhasználására történő optimalizálás. A technológiai tervezéskor a lehetőségeken belül az egyes értékeket úgy kell megválasztani, hogy a

- felhasznált számítógépidő
- technológus által a programozásra fordított idő
- nagyolás által meghatározott simitási ráhagyás
- alkalmazott szerszámok száma
- nagyolás időszükséglete
- simítószerszámok száma
- simítás időszükséglete
- megmunkálás szerszámfelhasználása egy optimális

megoldást adjon. Az egyes tényezők hatásaikban egymással ellentétesek, ezért lényeges, hogy olyan optimalizáló eljárást határozzunk meg, amely lehetőleg figyelembe veszi

minden tényező hatását.

Igy az eljárást az optimum kritérium alapján kiértékelve biztosíthatjuk valamennyi tényező értékének elfogadható szinten tartását.

A tervező rendszer az optimalizáló programrészek nélkül is működőképes lehet, de ez a megmunkálás hatékonyságát jelentős mértékben csökkenti.

A megmunkálás tervezésekor kiindulásként rendelkezésre kell állni a munkadarab geometriai modelljének - a továbbfeldolgozásra megfelelő formában - és egy technológiai adatbázisnak, amely a tervezéshez szükséges összes adatot tartalmazza.

A technológiai adatbázisnak tartalmaznia kell a szerszámokra vonatkozóan a

- méreteket,
- alakjellemzőket,
- anyagot, anyagállandókat,
- megengedett technológiai adatokat, állandókat,
- kopottsági állapotot,
- szerszámbefogás méreteit, alakját,
- befogott szerszám merevségét és

szerszámgépre vonatkozóan a

- megmunkálható méreteket,
- pozicionálási pontosságot,
- vezérlés lehetőségeit, pontosságát,
- előtolástartományt,
- fordulatszám értékeket, tartományt,
- statikus merevséget,
- előtolás dinamikus merevségét,
- főorsóteljesítményt,
- szerszámcsereidőt.

Az adatbázis főleg a rendszertől megkivánt pontosságtól és a megvalósított optimalizálásoktól függően több, esetleg kevesebb adatot is tartalmazhat.

A munkadarab geometriája (kész- és előgyártmány), az adatbázis és a megmunkálást tervező programrendszer birtokában a tervezést el lehet kezdeni. Ennek során kiindulhatunk az előgyártmányból vagy a kész munkadarabból. Az egyes megmunkálási fázisoknak - előnagyolás, nagyolás, simítás - az előző megmunkálási fázis által meghagyott felesleges anyagmennyiséget kell eltávolítani úgy, hogy a következő megmunkáláshoz szükséges ráhagyást érintetlenül hagyja. Az egyes megmunkálások tehát csak a rákövetkező megmunkálások ráhagyási alakzatainak ismeretében határozhatók meg. Annak figyelembevételével, hogy célszerű a nagyolást és a simítást a felületen lehetőleg egy lépcsőben végezni (mivel ezen szerszámok termelékenysége elég kicsi), a ráhagyási alakzatok meghatározhatók. Ráhagyási alakzatként tulajdonképpen két felületet értünk; az aktuális szerszám számára minimálisan szükséges, illetve maximálisan lehetséges ráhagyás által meghatározott felületeket, ami eltérő szerszámoknál természetesen más és más lehet. Mivel az egyes megmunkálási fázisok ráhagyása az előző fázis szerszámaitól függ, ezért a tervezést csak a kész alkatrész felületéből kiindulva, a megmunkálással ellentétes sorrendben lehet végrehajtani.

4.2 A megmunkálás pontosságának vizsgálata

A megmunkálás feladata az, hogy hibátlan munkadarabokat állítson elő, és így a tervezés alapvető szempontja a munkadarab méretpontosságának és előírt felületi simaságának biztosítása. A felületi simaság meghatározását általában csak ellenőrzésként kell elvégezni, mivel a forgácsolás körülményei (kisméretű, nagy fordulatszámmal forgatott alakos marók, kis előtolás) már önmagukban meghatároznak egy jó felületi simaság értékét.

A munkadarab megfelelő pontosságának biztosításához fel kell mérni a gyártási pontosságot meghatározó tényezőket, meg kell becsülni hatásukat és a technológia által befolyásolható tényezőket úgy kell beállítani, hogy a hibák együttes jelentkezésekor se haladja meg a méreteltérés a tűrés értékét.

A pontosságot befolyásoló tényezők:

- a munkadarab felületét leíró matematikai modell pontossága,
- a szerszám-mozgáspályát leíró matematikai modell pontossága,
- a szerszámgépvezérlés interpolációjának pontossága,
- a szerszám elméleti méretétől való eltérés,
okai: szerszám méret- és alakpontossága
szerszám megmunkálás közbeni kopása
szerszám(szár) rugalmas deformációja
szerszám hődeformációja
- a munkadarab felfogási pontossága,
- a munkadarab rugalmas deformációja,
- a munkadarab hődeformációja,
- a gép, készülék rendszer rugalmas deformációja,
- a munkadarab felületének hullámosodása,
- sarkoknál (kis görbületű helyeken) a szerszámgép tülledülésének mértéke.

A fenti tényezők a megmunkálás során többé-kevésbé mind fellépnek, de a konkrét megmunkálási körülmények és a megkívánt pontosság figyelembevételével jelentős részüket általában el lehet hanyagolni.

A többi tényező hatását elméleti megfigyelések és/vagy mérés-sorozat alapján meghatározott egyszerű matematikai modellel közelíthetjük. A megmunkálási pontosság számításakor az egyes hibák nagyságát a modellek alapján számított értékekkel, az elhanyagolásokat és a matematikai modellek hibáit pedig egy biztonsági tényezővel vesszük figyelembe.

4.3 A mozgásstratégia meghatározása

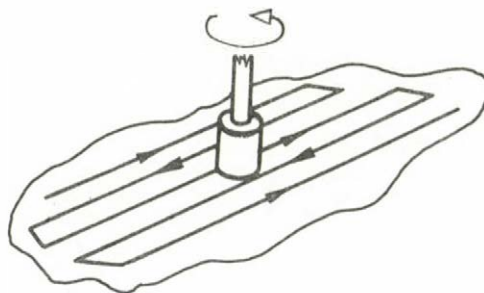
Mozgásstratégia alatt a szerszám forgácsoláskor végrehajtott mozgáspályájának típusát értjük. A stratégiák elnevezése általában a mozgáspályák geometriai előállítására is utal.

A mozgásstratégiák két alapvető típusa:

- cikcak és
- konturkövető.

Cikcak eljárás:

A cikcak eljárást általában akkor alkalmazzák, amikor nagy-méretű ráhagyás gyors eltávolítása a cél. Ilyenkor nagy forgácsolási sebességű marókkal egyenes vonalú alternáló mozgással forgácsolva a felesleges anyagmennyiség viszonylag gyorsan eltávolítható (33. ábra).



33. ábra.

A mozgáspályák számítása, vezérlése egyszerű, csak az egyes szakaszok kezdő és végpontját kell meghatározni. Ezt a stratégiát általában előnagyzásnál szokták alkalmazni.

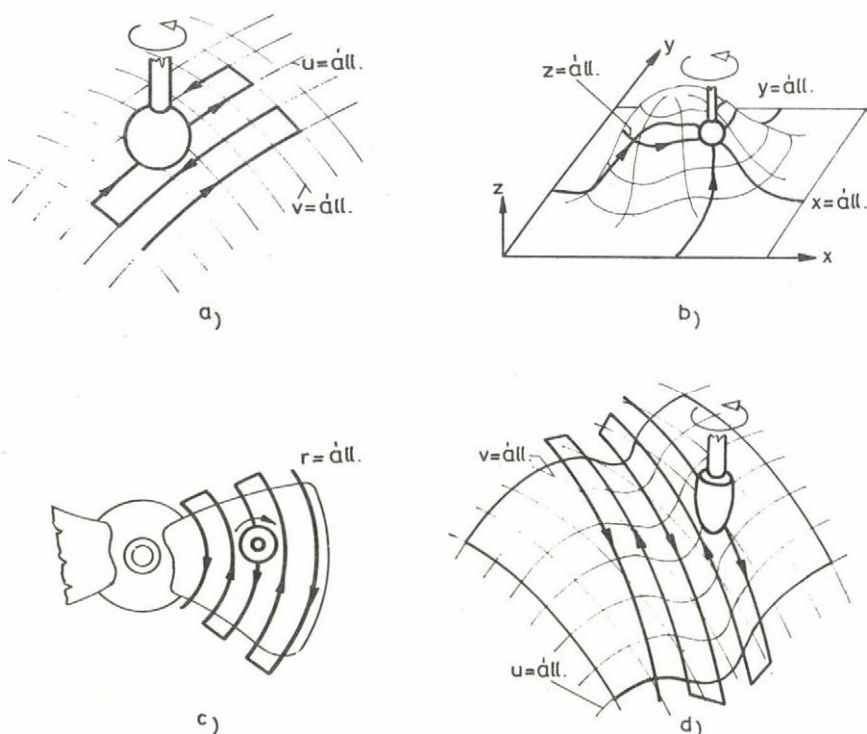
Konturkövető eljárás:

Nagyolásnál és simításnál, - mivel a ráhagyás itt már kis-mértékű - általában konturkövető stratégiákat választanak. A munkadarab felülete - a szerszámgép és a vezérlés korlátozásait figyelembe véve - általában többféle mozgásstratégia alapján is megmunkálható.

A konturkövető szerszámmozgások lehetséges változatai:

- paramétervonalak mentén (34/a ábra),
- a munkadarab három tengelymenti síkmetszetének valamelyike mentén (34/b ábra),
- valamely matematikai alakban megadott metszőfelület (pl. körhenger vagy sugaras metszősíkok stb.) mentén (34/c. ábra)
- a számítógép által meghatározott felületi görbék (pl. árok-szerű bemélyedések, bordaszerű kiemelkedések stb.) mentén (34/d ábra).

A technológusnak az egyes felületek megmunkálásához olyan stratégiát kell választania, hogy az adott geometriai pontosság elérése a rendelkezésre álló szerszámok, szerszámgép felhasználásával minél gazdaságosabban biztosítható legyen.



34. ábra.

A stratégia megválasztásakor figyelembe kell venni:

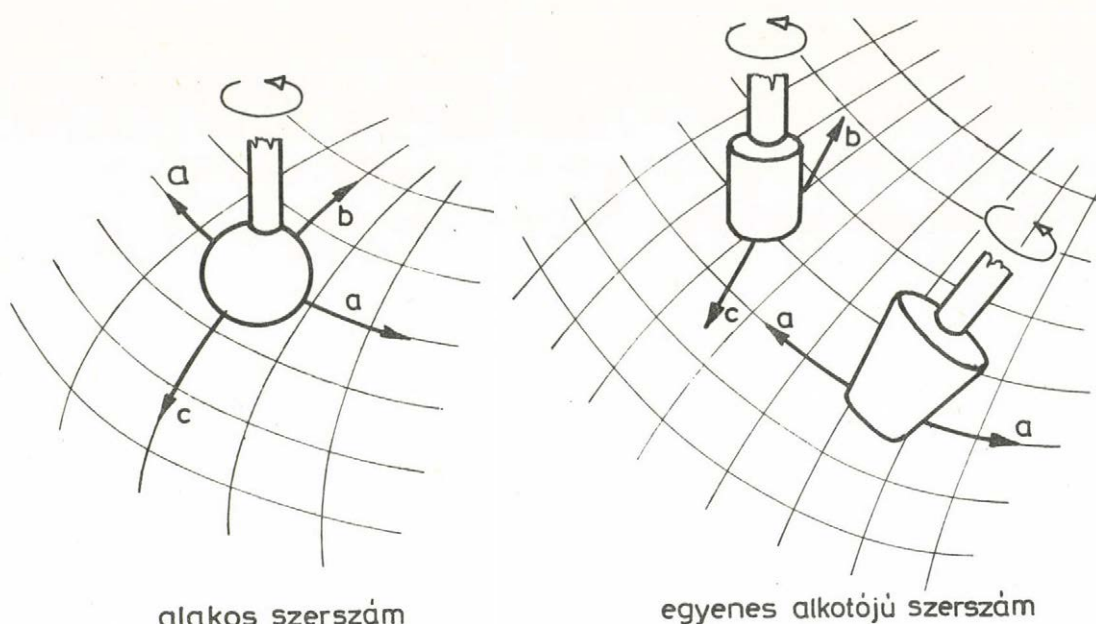
- a munkadarab eltérő pontosságu felületelemeinek elhelyezkedését,
- a munkadarab felületelemeinek (kiemelkedések, mélyedések) irányított elhelyezkedését,
- az egyes stratégiák által meghatározott lehetséges mozgáspályák mentén a forgácsolási körülmények változását,
- a mozgáspályák mentén előforduló nagy görbületű és/vagy meredek emelkedésű szakaszok mennyiségét,
- a szerszám gép eltérő pozicionálási pontosságu tengelyeinek elhelyezkedését,
- a szerszám gép eltérő dinamikus pontosságu (tullendülés) tengelyeinek elhelyezkedését,
- a lehetséges mozgáspályák mentén szükséges mellékmozgások, üresjáratok mennyiségét,
- az egyes megmunkálási stratégiák illesztésének lehetőségét.

Az egyes felületelemekhez rendelt stratégiákat ezen szempontok mérlegelése alapján úgy kell megválasztani, hogy a pontosság minél könnyebben biztosítható legyen. Ez a munkadarab pontossági követelményeknek és a nagy görbületű felületelemek helyzetének a gép pozicionálási és dinamikus pontosságával való egyeztetésével érhető el. A stratégia megválasztásánál a fentiekén kívül törekedni kell arra is, hogy a forgácsolási körülmények a megmunkálás során minél kevésbé változzanak.

Forgácsolási körülmények alatt a szerszám forgácsoló képességét befolyásoló tényezőket értjük.

Ezek:

- a munkadarab érintkezési pontja a szerszám felületén,
- a mozgás iránya az érintkezési ponthoz képest (35. ábra)
 - a) tengelyvonalra kb. merőleges síkban
 - b) tengelysíkban, a homlokfelület irányában
 - c) tengelysíkban, a homlokfelülettel ellenkező irányban

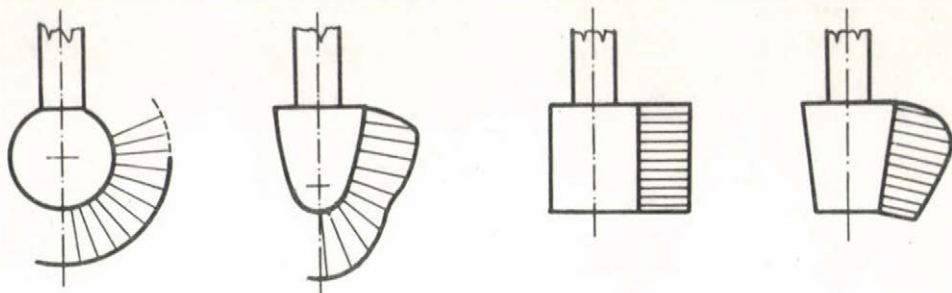


35. ábra.

- az érintkezési pont helyének változása a szerszám felületén és ennek a változásnak a sebessége,
- a munkadarabon a ráhagyás nagysága és változása a mozgáspálya mentén,
- a szerszám forgácsolóképesége, azaz az egy lépésben leválasztható maximális és minimális forgácsmennyiség a különböző mozgásirányoknak megfelelően.

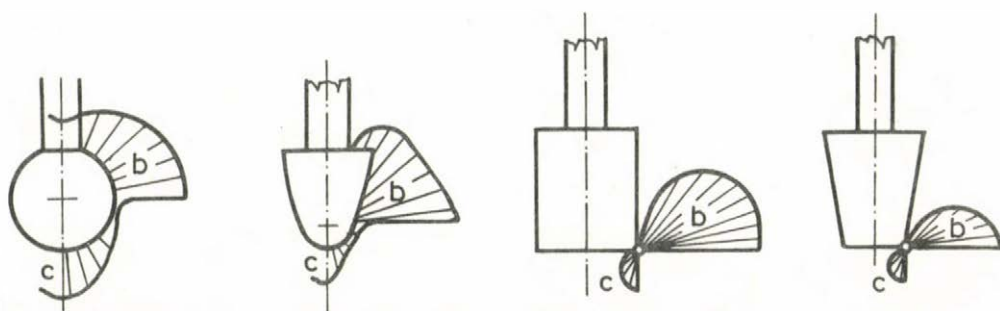
A maximális forgácsolóképeség változásának *jellegét* egyenes alkotójú és alakos szerszámokra az a mozgás típusnál az érintkezési pont helyének függvényében a 36. ábra, a b, c mozgástípusnál a mozgás irányának függvényében a 37. ábra mutatja.

a mozgástípus



36. ábra.

b, c mozgástípus



37. ábra.

A stratégia megválasztásánál meg kell vizsgálni, hogy a lehetséges mozgáspályák mentén milyen forgácsteljesítményű szerszámot lehet alkalmazni és a forgácsolás során hogyan változik a szerszám forgácsolóképessége.

Alakos szerszámoknak nevezzük azokat, amelyek alakja a munkadarabbal való érintkezés környezetében gömb, vagy annak tekinthető. Ezeket a szerszámokat általában simításra használják, mivel viszonylag nagy területen érintik a felületet, de a forgácsolóképességük kicsi és a fogazás alakja miatt a palást mentén változik.

4D megmunkálásig az állandó helyzetű szerszámtengely és a felület különböző állása miatt az érintkezési pont helyzete állandóan változik a szerszám palástján, ami a forgácsolóképesség állandó változásával jár együtt. Az érintkezési pont helyzete meghatározza a szerszámmozgás pillanatnyi síkját - ami a felület érintősíkjára az érintési pontban - de ezen belül az egyes mozgásirányok (lásd 35. ábra) is lényegesen befolyásolják a szerszám forgácsolóképességét. A 4D megmunkálásig a forgácsolás körülményeinek jelentős változása miatt programozási problémákat okoz a technológiai adatok megfelelő szinten tartása. Ugyanakkor a forgácsolóképesség változásának következtében a megengedett ráhagyás értéke a felületen pontról pontra változhat. Az ilyen ráhagyási alakzat geometriai előállítása bonyolultabb, mint az egyenközü ráhagyási alakzat esetében. Ha viszont a legkisebb forgácsolóképességre számított egyenközü ráhagyási alakzattal dolgozunk, akkor a megmunkálás hatékonysága jelentősen romlik (különösen c mozgásirány esetén).

5D megmunkálásánál ezek a problémák csökkenthetők azáltal, hogy a szerszámtengelyt a megfelelő szögben megdöntve, az érintkezési pont helyzete a szerszám felületén hozzávetőlegesen állandó helyen tartható. Ha a szerszámtengely helyzetét a munkadarab alakja határozza meg (hozzáférési, ütközési problémák miatt), akkor nem lehet a szerszámtengely helyzetét a forgácsolási körülmények javítására felhasználni és a 4D megmunkálásnál említett problémák itt is jelentkeznek.

Egyenes alkotóju szerszámokat célszerű alkalmazni nagyoláskor, amikor a pontossági ill. simasági követelmények kisebbek, de lényeges, hogy minél nagyobb legyen a forgácsolási teljesítmény Forgácsolásnál az érintkezési pont a mozgástípus esetén a palástfelületen vándorol, b és c mozgástípus esetén pedig a palást és a homlokél metszéspontjában helyezkedik el. Egyenes alkotó esetén az érintkezési pont vándorlása a forgácsolóképességre nincs jelentős befolyással (kivéve nagy kupszögű marókat), ezért az egyes stratégia változatok kiválasztásánál az egyes mozgástípusoknak a megmunkálásra gyakorolt hatását kell vizsgálni..

Az a változat - megfelelő körülmények között - a legtermelékenyebb, mivel a maró viszonylag széles felületen forgácsol és a megmunkálás folyamatos, kevés mellékmozgást igényel. A 4D megmunkálásig azonban ez a stratégia az állandó helyzetű szerszámtengely miatt csak kupos (ill. szög -) marókkal valósítható meg, ami több szempontból is hátrányos lehet. A munkadarab felületének elég jó megközelítéséhez a lehetséges szerszámok majdnem teljes választékára szükség lehet. A görbületnek és a felületi normálisnak a szerszámtengelyhez képest gyakori változása jelentősen megnehezíti a forgácsolási tervezhetőségét, komoly 3D geometriai ellenőrzést kíván és ráadásul az esetleg gyakori szerszámváltások következtében jelentkező tetemes mellékidő növekedés a termelékenységet jelentősen rontja. További hátrányként jelentkezik, hogy a kupos szerszámok a munkadarab közelítőleg párhuzamos alkotóju mélyedéseiben nem tudnak forgácsolni, valamint az, hogy a szerszám szempontjából homorú felületelemek megmunkálásához választható marók - méreteik miatt - nem termelékenyek.

Az 5D megmunkálás technológiai előnye ebben az esetben is megmutatkozik, hiszen - legalábbis domború felületekre - ezeket a hátrányokat nagyrészt kiküszöböli. A szükséges szerszámok száma jelentősen csökken, mivel csak hengeres alakból kell megfelelő készletet tartani. A szerszámtengely döntésével követhetjük a felület normálisának változását, így a ráhagyás geometriai ellenőrzése is egyszerűbb lesz és szerszámváltás esetleg csak ütközési problémák miatt lehet szükséges. Homorú felületek 5D megmunkálásánál viszont csak kis javulás érhető el, mivel a forgácsoláshoz kupos szerszámra van szükség, bár lényegesen kevesebb típusra, mint 4D megmunkálás esetében.

A b mozgástípus alapján a szerszámot úgy mozgatjuk el a felület mentén, hogy azt a homloklap érintse. A szerszám működő hossza a szerszámtengely és a felület meredekségének viszonyától és a ráhagyás nagyságától függ. Az előző mozgás-

változathoz képest ez az eljárás 4D megmunkálásig is több előnnyel rendelkezik. A felületet a homloklap alakítja ki, így hengeres alaku szerszámot lehet alkalmazni. A stratégia kielégítő pontosságot biztosít a munkadarab minden pontjában, szerszámváltást csak alámetszés elkerülése miatt igényel és a geometriai ellenőrzés is jelentősen egyszerűbb, még a homloklap torzulásának figyelembe vétele mellett is. Hátrányként jelentkezik, hogy domboru felületeknél általában kisebb termelékenység érhető el. 5D megmunkálásnál alkalmazva ezt a stratégiát a szerszámtengely döntésével változtathatjuk a homloklap működő sugárértékét. A szerszámot úgy vezetve, hogy a teljes homloklap érintse a felületet, jelentős termelékenységnövelést érhetünk el.

A harmadik mozgás változat (c), a munkadarabnak a maró homloklapfelületével történő megmunkálása, mozgásban a második változathoz hasonlít, csak a mozgás iránya avval ellentétes. Ezt a stratégiát ott célszerű alkalmazni, ahol az előző kettőt nem lehet, mivel a homlokfogazás forgácsolóképessége kicsiny. Ennél a megmunkálási módnál külön figyelni kell arra, hogy a ráhagyás nagysága ne haladja meg a fogakra megengedett értéket. A stratégia alkalmazási területei főleg a kis ráhagyású szűk helyek, ahova csak forgácsolva lehet behatolni. Az ilyen mozgástípusnál, - az alkalmazás jellegénél fogva - 5D megmunkálással sem lehet jelentős technológiai előnyöket elérni.

A stratégia megválasztásakor a fenti szempontokon alapuló részletesebb vizsgálat előtt célszerű néhány általánosabb irányelvet figyelembe venni (feltételezve, hogy a tervezőrendszer valamennyi stratégiát "tudja").

A mozgáspályák geometriai adatai legkönnyebben a paramétervonalak menti megmunkálás esetén számíthatók, azonban ez általában más, alkalmasan választott stratégiához képest rosszabb technológiát eredményez.

A valamely matematikai alakban megadott metszőfelülettel előállítható mozgáspályák alkalmazása akkor indokolt, ha az alkatrész kialakításában és méretmegadásában is ez a matematikai alak dominált (pl. körhengeres metszőfelület alkalmazása járókerekek stb. megmunkálásánál).

A munkadarab felületén lehetnek olyan felületelemek, amelyeknek jellegzetes iránya nem egyezik meg a paramétervonalak irányával és kedvező mozgáspályát az eddig említett stratégiák egyikével sem lehet előállítani (34/d. ábra). Ezen különleges barázdajellegű felületelemek keresztirányú megmunkálása az alkalmazható maró átmérő és a dinamikus pontosság megvalósítása szempontjából problémákat okozhat. A mozgáspálya meghatározásához szükség van a barázda jellegzetes irányának, "hossztengelyének" helyzetére, amely általában közvetlenül nem áll rendelkezésre, de meghatározható pl. a barázda miatt jelentkező helyi minimumpontok vizsgálatával. Ilyenkor a szerszámmozgás stratégiájának meghatározását a számítógépnek kell elvégezni a technológus által kijelölt helyen és irányban. (Az előbbieket értelemszerűen kiemelkedő vékony bordák megmunkálására is vonatkozhatnak.)

Mivel a barázdaszerű felületelem folytonosan kapcsolódik a környezetéhez, és jellegzetes irányát számítógép határozza meg, számítógéppel célszerű meghatározni a szomszédos stratégiák határát kijelölő térbeli görbét is. Előfordulhat azonban, hogy a munkadarab felülete olyan két vagy több jellegre eltérő nagyobb felületelemből áll, amelyeket érdemes eltérő stratégiákkal megmunkálni. Ilyenkor az egyes stratégiák típusának meghatározásán túl gondoskodni kell azok összekapcsolásáról is, azaz meg kell adni azt a felületi görbét, amely a két stratégia határvonalát képezi. Ezt a feladatot az előbbi eseten kívül akkor is el kell végezni, amikor több azonos stratégiát illesztünk egymás mellé (pl. járókerekek lapátjainak megmunkálásakor), illetve amikor több felfogásban készül el a munkadarab.

4.4 Szerszámválasztás

Ahhoz, hogy a mozgásstratégia alapján szerszámpályát számíthassunk, ismerni kell a megmunkáláshoz alkalmazott szerszámokat, amelyek kiválasztása - bizonyos szempontok alapján - az adott pálya forgácsolásához alkalmazható szerszámok köréből történik. Az egyes pályaszakaszokon használható szerszámok méretének és típusának meghatározásához a megmunkálandó felületnek a mozgás stratégiája mentén történő átvizsgálása szükséges.

A felület geometriai vizsgálatánál meg kell határozni és figyelni kell a pálya mentén a szerszám alakja miatt a felület normálisát, a szerszámméret miatt a felület pályamenti és arra merőleges görbültségét, a szerszámütközés, illetve alámetszés miatt a felület pályamenti görbültségét és - a várható szerszámtípustól függően - a pálya megfelelő környezetét. A felület geometriai vizsgálata igen számításigényes, ezért célszerű azt a minimálisan szükségesre csökkenteni. Mivel az egyes maróméretek lépcsősen változnak és a kiválasztáskor bizonyos biztonsági távolságokat (ütközés és alámetszés elkerüléséhez) is figyelembe kell venni, ezért az egyes maróméret-korlátok meghatározása hozzávetőleges pontossággal is megfelelő. A munkadarab felületét változó sűrűséggel vizsgálva - attól függően, hogy az mennyire sima ill. bonyolult - a szükséges számítások mennyiségét jelentősen csökkenthetjük. A vizsgálat sűrűségét rajz vagy grafikus display alapján jelelhetjük ki, oly módon, hogy a két vizsgált mozgáspálya között a szükséges értékek egyszerű interpolációs eljárással meghatározhatók legyenek. A felesleges számítások mennyiségét tovább csökkentheti a tervezőrendszernek azon képessége, hogy egyes pontok környezetében képes geometriai, de főleg ütközési vizsgálatot végezni. Ez a lehetőség olyan mozgáspályák vizsgálatától mentesítené a rendszert, amelyek simák, de egy (néhány) pontjuk ütközési szempontjából veszélyes lehet. A rendszerben ezeket a lehetőségeket csak megfelelő gyakorlattal rendelkező technológus tudja intelligens grafikus display segítségével kihasználni. Ennek hiányában a geometriai vizs-

gálatot - jelentős számítógépidőnövekedés mellett - a munkadarab legbonyolultabb felületeleme által megkívánt sűrűséggel kell végrehajtani.

A geometriai vizsgálatnak egy olyan megmunkálhatósági modellt kell felállítania, amely segítségével a szerszámválasztás és a szerszámok forgácsolómozgása megtervezhető. Az adatrendszer megjelenési formája lényegesen változhat attól függően, hogy a további feldolgozás számítógéppel vagy interaktív módon grafikus display-jel történik-e. A feldolgozás módjától függetlenül a megmunkálhatósági modell alapján meg kell határozni a forgácsolási tervet, azaz az alkalmazott szerszám-típusokat, az általuk megmunkált felületelemeket és azok megmunkálásának sorrendjét. A feladat optimalizálással oldható meg, melyben (hozzávetőlegesen) figyelembe kell venni a felületelemek megmunkálásának időszükségletét, a mellékmozgások mennyiségének alakulását, a felületelemek megmunkálási sorrendjében meglevő sorrendi feltételeket, a felületelemek csatlakoztatásakor jelentkező technológiai szempontokat, s esetleg más tényezőket is az optimalizáló programtól függően. A tervezőrendszer kiépítésének egy korai szakaszában a forgácsolási terv meghatározásának egy triviális megoldását is alkalmazhatjuk, amely azt jelenti, hogy a munkadarab felületét a mozgásstratégia mentén egy kellően kisméretű gömbszámmal végigmunkáljuk. Ez általában gazdaságtalan technológiát jelent, előnye viszont, hogy a tervezőrendszer az optimalizáláson kívül a felület geometriai vizsgálatát is nélkülözheti.

4.5 Forgácsolómozgás meghatározása

A szerszám forgácsolás közben végzett mozgása a mozgásstratégia és a forgácsolási terv ismeretében határozható meg. A szerszámmozgás meghatározásához először a szerszám és a felület érintkezési pontjai által kijelölt pályát kell számítani. A számítás alapvető szempontja, hogy a megmunkálás – a megfelelő minőségű munkadarab előállítása mellett – a lehető legrövidebb ideig tartson. Ezt úgy érhetjük el, hogy a mozgáspálya hosszát a minimálisra csökkentjük, azaz az egyes felületelemeken csak annyiszor halad végig a marószerszám, ahányszor az előirt pontosság betartásához feltétlenül szükséges. A megmunkálás pontossági vizsgálatát az adott körülmények között elvégezve meghatározható a felület megengedhető hullámossága. A felületnek a pontosság által megengedett hullámosodásából a pálya minden pontjában kiszámíthatjuk szomszédos pályák maximális távolságát. Az így létrejövő felületi görbék azonban – a felület változó görbültsége és állása miatt – nem felelnek meg a stratégia által megszabott alaknak, még akkor sem, ha az első pálya – amelyet célszerűen a stratégia által megmunkálható felület egyik szélső konturja alapján választunk – megfelelő alakú. A megmunkálás a mozgásstratégiának megfelelő pályaszakaszok egymás mellé illesztésével történik, ahol a szomszédos pályaszakaszok között esetleg csak egy helyen lép fel a számított maximális távolság. A számításakor optimalizálással lehet a teljes és tört pályaszakaszok hosszát úgy meghatározni, hogy megfelelő pontosság mellett a teljes hossz minimális legyen (a mellékmozgások tulzott növekedése nélkül).

A $2\frac{1}{2}D$ megmunkálásnál fenti számítási eljárás nem használható, mivel ha síkbeli mozgásstratégiát választunk is, (azaz a szerszám érintkezési pontja a munkadarab felületén síkgörbét ír le) a szerszám referenciapontjának mozgáspályája a felületi normális állásának változása miatt általában térgörbe lesz (kivéve ha a szerszám érintkezési pontja a homlokélen van). A szerszám gép vezérlőegysége viszont a szer-

szám referenciapontját csak síkban tudja vezérelni. A megoldás ebben az esetben a felületet - a szerszám referenciapontjának megfelelő - burkolófelület síkmetszetével adódik (a burkolófelület csak gömbszerszám esetében számítható viszonylag egyszerűen). Ebben az esetben viszont nem ismert (illetve csak rendkívül bonyolultan számítható) a szerszám nyomvonala a felületen, illetve a szomszédos nyomvonalak távolsága. A $2\frac{1}{2} D$ megmunkálás esetén csak annyit tehetünk, hogy a bizonytalanságok miatt megfelelő rátartással megbecsüljük a szomszédos mozgáspályák távolságát. A forgácsolás így nem lesz hatékony, de optimalizálásra nincs lehetőség, mivel a feltétlenül szükséges pályaszakaszok hosszát nem tudjuk meghatározni.

Az egymás fölött elhelyezkedő mozgáspályák (simitás, nagyolás) számítása azonos módszer alapján történik, csak míg a simításnál a geometriai adatokat munkadarabfelület alapján számítjuk, addig az ezt megelőző nagyolásnál a számítás kiinduló pontjának az alkalmazott simítószerszámok alapján meghatározott kettős ráhagyási alakzat belső (a munkadarab felé eső) felületét tekintjük. A megengedett méreteltérésnek (hullámosodás) a két ráhagyási alakzat különbségét tekintjük. Ez a módszer lehetővé teszi a konturkövető megmunkálások tetszőleges számú egymásraépítését. Cikcak megmunkálásnál viszont a ráhagyási alakzatot csak ellenőrzésre lehet felhasználni, mivel a mozgások legnagyobb része nem a felület mentén történik. A mozgáspályák meghatározásának alapvető célja, hogy a szerszámgép illetve a marószerszám teljesítményét minél jobban kihasználva a felesleges anyagmennyiséget minimális idő alatt távolítsuk el.

Az adott előgyártmány figyelembevételével a megmunkálás megkezdése előtt szükség lehet néhány hagyományos megmunkálási műveletelem végrehajtására, (pl. előfurás, felfurás stb.). Ha ezeket a műveleteket is beillesztjük a megmunkálásba, akkor a mozgáspályák tervezésének utolsó lépéseként meg kell határozni az alkalmazott szerszámok típusát és mozgáspályáját.

4.6 Technológiai adatok meghatározása

A számítás feladata az egyes műveletek optimális adatainak meghatározása. Az optimalizálás célját előzőleg meghatározva a rendszernek képesnek kell lennie a megfelelő célfüggvények alapján az adatok automatikus számítására. A számításhoz megfelelő adatbázis szükséges.

Számítandó adatok:

- előtolás: a gép, szerszám és munkadarab korlátokon túl igen fontos az előtolást (pályamenti sebességet) a gép dinamikus pontosságára ellenőrizni,
- fordulatszám: ez határozza meg a forgácsoló sebességet, lényeges szerepe van a forgácsolási körülmények között, kis szerszámtérőknél problémát okozhat a megfelelő fordulatszám biztosítása,
- forgácsolási idő, éltartam (becslés): a megmunkálás során éltartam ellenőrzést kell végezni (különösen a hosszabb ideig forgácsoló szerszámoknál), amely alapján meghatározható az egyes szerszámváltások helye,
- forgácsolóerő, rugalmas deformáció, szerszámkopás stb. és ezek korrekciója: ezeket a számításokat csak fejlettebb tervezőrendszerek tudják elvégezni, ahol azt a szükséges pontosság is indokolja.

Az egyes adatok számító algoritmusai jóval bonyolultabbak, mint azok, amelyeket a hagyományos marás technológiai adatainál alkalmazunk. A nehézségeket az okozza, hogy a maró térgörbén mozog és az érintkezési pont helyzetének változása általában a forgácsolósebesség megváltozását eredményezi. Ezért a tényleges megmunkálási ráhagyás nehezen vagy egyáltalán nem határozható meg. Ugyanakkor az alakos marók forgácsolási jellemzőiről igen kevés technológiai adat áll rendelkezésre. Technológiai szempontból viszont igen előnyös, ha az előtolás és fordulatszámértékeket mindig az adott forgácsolási körülményeknek megfelelően állítjuk be, mert ez jó szerszám kihasználást,

és rövid gépidőt eredményez. Ez viszont a technológiai adatok számításigényének jelentős növekedéséhez vezet, miközben a mozgáspálya geometriai adatait is számítani, tárolni kell. Az egyes számítási módszerek bonyolultabbak lesznek és növekszik a vezérlőprogram mérete is.

4.7 A szerszám teljes mozgáspályájának meghatározása

Az NC szerszámgép a szerszám egy meghatározott pontját az u.n. referenciapontot vezérli, ezért az érintkezési pont pályáját (forgácsoló mozgás) át kell számítani a referenciapont pályájára. Meg kell határozni az egyes különálló forgácsoló mozgások megfelelő végpontjait összekötő mellékmozgásokat, beépítve az esetleg szükséges kiegészítő mozgásokat. A mellékmozgások tervezésénél ütközési problémák léphetnek fel, ezért a tervezéshez célszerű grafikus display-t használni.

A pálya meghatározásakor megoldandó feladatok:

- a munkadarabon lévő felületi görbék és pályamenti sebességek átszámítása a szerszám referenciapontjára. Ez nem szükséges 2 1/2D megmunkálásnál, viszonylag egyszerű gömbszerszámoknál (a felület normálisának ismeretében) és bonyolult akkor, ha a felülettel a maró egyenes alkotója érintkezik,
- a szerszámpálya korrigálása, amennyiben a rendszer képes valamely (rugalmassági-, kopás-) korrekciót számítani,
- az egyes forgácsoló mozgások összekapcsolása. A cél itt az, hogy a mellékmozgások - ütközés nélkül - minél rövidebb idő alatt végrehajthatók legyenek (ez segíthető interaktív tervezéssel),
- szerszámváltások és egyéb kiegészítő mozgások pályájának beépítése a mozgásba (a tervezéshez az adott szerszámgép szerszámváltási rendszerének ismerete szükséges).

A teljes mozgáspálya minden elemének meghatározása után számítható a gépidő és ha szükséges, az egyes szerszámok foglaltságának időértékei is.

A tervezőrendszer a megmunkáláshoz szükséges információkat a saját belső formátumának megfelelően állítja elő, amelyet utolsó lépésként át kell alakítani a szerszámgép vezérlés által érthető formátumra (posztprocesszálás).

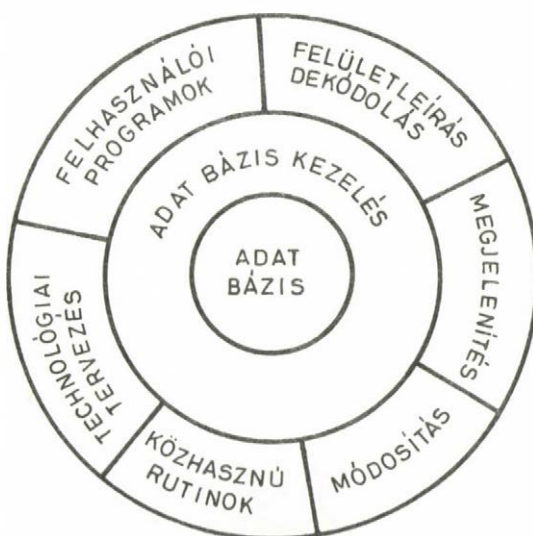
A fentiekben felvázoltuk egy, a szoborszerű felületek megmunkálására szolgáló, hatékony technológiát tervező rendszer körvonalait. Az egyes technológiai kérdéseket nem vizsgáltuk matematikai, számítástechnikai oldalról, de néhány helyen szükségesnek láttuk felhívni a figyelmet az interaktív tervezés előnyeire. Mivel a fejezet egy fejlett tervezőrendszer lehetőségeit tárgyalja, amely megvalósítása több fejlesztési fázisban oldható meg, ezért a tervezőrendszert olyan moduláris felépítéssel célszerű elkészíteni, amely lehetővé teszi az alacsonyabb fejlettségi szintű változatok továbbfejlesztését.

5. SZOBORSZERŰ FELÜLETEK TERVEZÉSÉNEK MEGMUNKÁLÁSÁNAK RENDSZERTERVE

5.1 Általános elképzelések

Célkitűzésünk egy olyan számítógépes modulkészlet kialakítása, melynek segítségével különböző mérnöki alkalmazásokhoz szoborszerű felületeket tervező rendszert lehet létrehozni. Amennyiben a modulkészletet jól határozzuk meg, akkor mindössze néhány felhasználás-specifikus rutin megírására lesz szükség a konkrét rendszer létrehozásakor, a többi feladatot a készlet elemeinek felhasználásával lehet elvégezni.

A modulok függetlenítése céljából a következő strukturát választjuk (38. ábra).



38. ábra.

A rendszer magját az adatbázis és az adatbázis kezelő programcsomag alkotja. Az adatbázis kezelő program biztosítja a különböző modulok felé a geometriai, technológiai stb. adatok logikai szintű hozzáférését, (pl. az egy felületelemet leíró mátrix elemeinek előkeresését).

Az adatbázisban levő adatokat (adatcsoportokat) logikai rekord formájában tároljuk. Például a megmunkálandó felület egy elemét a következő mátrix-egyenlettel írjuk le:

$$\bar{F}(u,v) = (u^k, u^{k-1} \dots u^2, u, 1) \underline{\underline{M}} \begin{bmatrix} \bar{P}_{00}, \bar{P}_{01}, \dots, \bar{P}_{0k} \\ \vdots \\ \bar{P}_{L0}, \bar{P}_{L1}, \dots, \bar{P}_{Lk} \end{bmatrix} \underline{\underline{M}}^T \begin{bmatrix} v^L \\ v^{L-1} \\ \vdots \\ v \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{u}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{M}}^T \underline{v}$$

ahol $\underline{\underline{M}}$ az adott felületinterpolációs ill. approximációs módszerre jellemző mátrix, a $\underline{\underline{P}}$ mátrix elemei pedig a felületet meghatározó térbeli pontok koordinátái. Mivel $\underline{\underline{P}}$ a felületelemet egyértelműen meghatározza, ezért az adatbázisban $\underline{\underline{P}}$ elemeit tároljuk. Ugyanakkor ez a tárolási mód lehetővé teszi különféle matematikai eljárások használatát a felület interpolációjára. A modellezett test felületét ezen felületelemek összessége adja.

A dekódoló modul feladata a külső leírásokból a belső tárolási (normál) alak adatainak kiszámítása. A modul feladatát lényegében két lépésben hajtja végre:

- a.) felismeri a specifikus leírási formát és ennek adatait
- b.) majd ennek ismeretében a megfelelő geometriai rutinok

felhasználásával meghatározza a felületet definiáló támpontokat és ezek elrendezését.

Az egyes megadási módokat és a hozzájuk tartozó geometriai számításokat részletesen a későbbiekben tárgyaljuk. A nyelvi utasítások felismeréseire és a hozzájuk tartozó adatok konvertálására szolgáló első rész az intézetben kifejlesztett kisépéses completerrel valósitjuk meg. Néhány alkalmazásban a felületet valamilyen tervező program automatikusan határozza meg és ilyenkor az előbb említett felismerő funkcióra nincsen szükség.

Gépészeti alkalmazásokról lévén szó, igen nagy jelentőséggel birnak a vizuális ellenőrzés és a képszerü (rajz) dokumentáció. A hagyományos gépészeti rajz, - tekintettel az előforduló alakzatok bonyolultságára - nem jön számításba, így más módszereket kell kidolgozni. Néhány jól használható megjelölési módszer.

- paraméter vonalak ábrázolása
- metszet-sokaság ábrázolása.

Ez utóbbiak speciális esete a szintvonalak serege.

Interaktiv tervező rendszereknél igen jelentős szerep hárul az u.n. módosító modulokra. Elképzeléseink szerint a felület módosítása az azt definiáló támpontok koordinátáinak módosításával történik. Problémát jelent azonban a megfelelő visszacsatolás; egy pont térbeli mozgását a két dimenziós képernyőn jól érzékeltető ábrázolás kidolgozása. A megfelelő megoldás kidolgozására kísérleteket folytattunk.

A közhasznu rutinok "utility"-k alkotják a negyedik modult. Az előbbi három modullal szemben, melyek elsősorban önálló működtetésre készültek, ezek a rutinok, bár önállóan is használhatóak, de beépülhetnek a felhasználói rutinokba is. Csak néhányat említünk meg ezek közül: szoborfelületekkel határolt testek térfogatának, súlyának, súlypontjának és nyomatékai-

nak kiszámítására szolgáló rutinok stb.

Mivel a tervezés célja egy gépészeti alkatrész számítógépes modelljének létrehozása, az előbbiekhöz logikusan kapcsolódnia kell a gyártás tervezésének is. A technológia tervező alrendszer látja el ezt a feladatot és a következő főbb modulokból áll:

- a.) forgácsolási stratégiák kiválasztása
- b.) szerszám választás
- c.) technológiai adatok meghatározása

Az adott igényeknek megfelelő technológiai tervező alrendszer (vagy modul készlet) részletesebb leírásával a későbbiekben foglalkozunk.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a tervező milyen munkafolyamat szerint dolgozik és ez a folyamat hogyan biztosítható a felvázolt keretek között. Alapjában véve kétféle munkamódot különböztetünk meg.

Az első esetben a tervezés iteratív folyamat: a tervező felvázol egy elképzelt megoldást, majd ellenőrző számításokat végez és ezek alapján módosítja elképzeléseit. Ezt mindaddig folytatja, amit kielégítő eredményt nem ér el. Az első, elképzelt megoldás leírását a dekódoló modul segítségével közli a számítógéppel. Az ellenőrző számításokat a felhasználói rutinok segítségével végzi el, majd ennek eredménye alapján a módosító modul segítségével változtathatja meg a tervező a modellt.

A második esetben kiforrott módszerek állnak rendelkezésre az alkatrész alakjának meghatározására és az így előállított felületet nem kell módosítani. Ebben az esetben a megfelelő számítógépes tervezői rendszer és a felületmegmunkáló rendszer összekapcsolása a feladatunk.

5.2 Felületleírás, dekódolás

Az input modul feladata a felhasználó által megadott szoborfelület vagy felületelem geometriai leírásának transzformálása az előzőekben megadott tárolási formára, a szoborfelületek normál alakjára.

Az első fejezet elemzésének alapján az alábbi négy megadási módot tartjuk szükségesnek:

- 1.) A felület definíciója a támpontokkal.
- 2.) A felület megadása a rajta elhelyezkedő pontmátrix és bizonyos határfeltételek segítségével.
- 3.) Felület megadása egy ún. gerincgörbével és az adott pontokon erre merőleges metszetekkel. Mind a gerincgörbét, mind a metszeteket megadhatjuk a görbéken elhelyezkedő pontokkal vagy a görbékét kifeszítő támpontokkal.
- 4.) Forgástesteket a forgástengellyel és egy síkbeli, esetleg térbeli görbével, az alkotóval adhatunk meg. Az alkotót (hasonlóan a 3. ponthoz) pontjaival vagy a definiáló támpontokkal adhatjuk meg.

Mint azt az első fejezetben a hajócsavar példájából láthattuk, egyes esetekben szükséges lehet a metszeteket leíró görbék transzformálációja, deformálása bizonyos szabályok szerint. Az adott példában ez a profil meghajlítását jelenti, amely egy konform leképezéshez vezet.

Tekintsük át a különböző megadási módokat és azokat a matematikai műveleteket, amelyeknek segítségével az illető leírási módot normál alakra hozzuk.

- 1.) Felület meghatározása a kifeszítő támpontokkal:

Ebben az esetben a geometriai modul feladata mindössze a támpontok koordinátáinak elhelyezése a normálalak mátrixában.

- 2.) A felület megadása a rajta elhelyezkedő pontmátrix és bizonyos határfeltételek segítségével:

A belső tartópontok meghatározásához feltételezzük, hogy egy u -ban, v -ben harmadfoku felületelem négy sarokpontját a megadott pontok alkotják. Ennek segítségével meghatározhatjuk a "belső" támpontok és a felületi pontok közötti kapcsolatot. A felület vagy felületelem szélét azonban nem lehet ezen információk alapján meghatározni. Ehhez újabb adatokra van szükség.

Alapjában két lehetőség van:

- a.) a felület szélét (határát) alkotó pontokban az érintő sík normálisának ill. a parciális deriváltaknak a megadása.

A tervező általában csak az érintő sík megadásában érdekelt, számára ez rendelkezik konkrét geometriai értelemmel, a normálvektor abszolút értéke azonban már nem. Mivel az érintő sík "iránya" nem határozza meg egyértelműen a felület szélét, feltétlenül szükség van más adatokra is.

- b.) második lehetőségként adódik, hogy a második deriváltakra kötünk ki valamilyen feltételeket. Itt újra több lehetőség van:

- I./ a második derivált vektorok nullák a peremen
- II./ a második derivált vektorok értéke konstans a felület peremén
- III./ a második derivált az adott perempont és három szomszédjának valamilyen lineáris kombinációja.

A továbbiakban csak az a.) és b(I). pontokkal foglalkozunk.

Az a.) esetben tehát adva vannak az $\bar{F}_{i,j}$ $0 \leq i \leq n$; $0 \leq j \leq m$ felületen levő pontok, valamint a felület peremén az érintővektorok: azaz $\bar{F}_{0,j}^{(u)}$, $\bar{F}_{n,j}^{(u)}$, $\bar{F}_{i,0}^{(v)}$, $\bar{F}_{i,m}^{(v)}$, ahol a felső index a deriválás irányát jelzi. Szükségünk van még ezen kívül a keresztderiváltakra a felület négy sarokpontjában:

$\bar{F}_{0,0}^{(u,v)}$, $\bar{F}_{0,m}^{(u,v)}$, $\bar{F}_{n,0}^{(u,v)}$, $\bar{F}_{n,m}^{(u,v)}$. Feladatunk ezekután

a B-spline felület támpontjainak $(\bar{P}_{i,j})$ meghatározása.

Az analóg, görbére vonatkozó feladat megoldását a 2. fejezetben adtuk meg, ahol azt láttuk, hogy a támpontokat a (21) egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. Ezen egyenletrendszer felületekre általánosított alakja a 118. old. első mátrixegyenlete.

A térbeli támpontmátrix láthatóan tulnyulik a térbeli felületi-pont mátrixon, mivel a felület peremén a deriváltak viselkedését előirtuk. Az egyenletrendszer megoldása a $\bar{P}_{i,j}$ támpontokat szolgáltatja, amelyek segítségével az $\bar{F}_{i,j}$ pontokat tartalmazó B-spline felület

$$\bar{F}(u,v) = \underline{u}^T \underline{B} \underline{\bar{P}}_{i,j} \underline{B}^T \underline{v}$$

alakban állitható elő.

Ha a peremgörbe-menti deriváltak nem ismertek, akkor egyéb kikötést kell tenni a peremen, pl., hogy a második deriváltak eltűnnek (b/I eset).

A felületet definiáló támpontokat ezért most a 2. fejezet (20) egyenletének általánosításaként adódó egyenletrendszerből kapjuk, (ld. 118. old a második mátrixegyenletét)

$$\frac{1}{36} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{-1,-1} & \dots & \bar{p}_{-1,j} & \dots & \bar{p}_{-1,m+1} \\ \vdots & & \bar{p}_{0,0} & \dots & \bar{p}_{0,m} & \vdots \\ \bar{p}_{i,-1} & \vdots & \vdots & \vdots & \bar{p}_{i,m+1} & \vdots \\ \vdots & \bar{p}_{n,0} & \dots & \dots & \bar{p}_{n,m} & \vdots \\ \bar{p}_{n+1,-1} & \bar{p}_{n+1,j} & \dots & \dots & \bar{p}_{n+1,m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & & & & \\ 0 & 4 & 1 & & & \\ 3 & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 4 & \cdot \\ & & & & 1 & \cdot & 1 & 3 \\ & & & & & \cdot & 4 & 0 \\ & & & & & & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{0,0}^{(u,v)} & \dots & \bar{F}_{0,j}^{(u)} & \dots & \bar{F}_{0,m}^{(u,v)} \\ \vdots & & \bar{F}_{0,0} & & \bar{F}_{0,m} & \vdots \\ \bar{F}_{i,0}^{(v)} & \dots & \bar{F}_{i,j} & \dots & \bar{F}_{i,m}^{(v)} \\ \vdots & \bar{F}_{n,0} & & & \bar{F}_{n,m} & \vdots \\ \bar{F}_{n,0}^{(u,v)} & \dots & \bar{F}_{n,j}^{(u)} & \dots & \bar{F}_{n,m}^{(u,v)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 6 & 0 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{0,0} & \bar{p}_{0,1} & \bar{p}_{0,j} & \dots & \bar{p}_{0,m} \\ \bar{p}_{1,0} & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \bar{p}_{i,0} & & \bar{p}_{i,j} & & \bar{p}_{i,m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \bar{p}_{n,0} & \dots & \bar{p}_{n,j} & \dots & \bar{p}_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & & & & \\ 0 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 0 \\ & & & & & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{0,0} & \dots & \dots & \bar{F}_{0,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ & \bar{F}_{i,j} & & \\ \vdots & & & \vdots \\ \bar{F}_{n,0} & \dots & \dots & \bar{F}_{n,m} \end{bmatrix}$$

Ha a megoldásként adódó $\bar{P}_{i,j}$ támpontokhoz még hozzávesz-
szük a

$$\bar{P}_{-1,j} = 2\bar{P}_{0,j} - \bar{P}_{1,j}$$

$$\bar{P}_{n+1,j} = 2\bar{P}_{n,j} - \bar{P}_{n-1,j}$$

$$\bar{P}_{i,-1} = 2\bar{P}_{i,0} - \bar{P}_{i,1}$$

$$\bar{P}_{i,m+1} = 2\bar{P}_{i,n} - \bar{P}_{i,n-1}$$

pontokat (lásd a 2. fejezetet) akkor ezek segítségével a
teljes B-spline felületet a tárgyalt módon megkaphatjuk.

A fenti peremfeltétel esetén tehát a felületen levő és
előre megadott \bar{F}_{ij} pontok száma és a tartópontok ($\bar{P}_{i,j}$)
száma megegyezik, az érintővektorok pedig a tartópontokból
kiadódnak; pl.:

$$\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial u}\right)_{0,0} = \bar{P}_{0,1} - \bar{P}_{0,0}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial v}\right)_{0,0} = \bar{P}_{1,0} - \bar{P}_{0,0}$$

3.) Felület megadása gerincgörbével és metszetekkel:

Legyen adott egy $Q(t)$ gerincgörbe és egy reá merő-
leges sik-metszet sereg. A sikmetszeteket egy lokális
(x,y) koordinátarendszerben adjuk meg. A lokális
koordinátarendszer origója legyen a gerincgörbén
az adott pontokban, és az (x,y) sik legyen merőleges
a görbe adott pontbeli érintőjére - \bar{t} -re -, valamint
az y tengely essen egybe a vezérgörbe binormálisával.

Adott vezérgörbe esetén kiszámítható a görbe minden pontjában a kísérő triéder vektorainak helyzete. A felületen levő pontok vagy a támpontok meghatározásának első lépése tehát a \bar{t} , \bar{n} és \bar{b} azaz az érintővektor, a főnormális és a binormális meghatározása. Ennek ismeretében végezhető el a következő transzformáció, mellyel a pontok térbeli helyzetét határozzuk meg, azaz a metszetgörbék definiáló pontokat a lokális (xy) koordinátarendszereből az $(x' y' z')$ globális koordinátarendszerbe transzformáljuk.

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \frac{\bar{i} \cdot \bar{t}}{|\bar{t}|} + y \cos \frac{\bar{j} \cdot \bar{t}}{|\bar{t}|} + z \cos \frac{\bar{k} \cdot \bar{t}}{|\bar{t}|} \\ y' &= x \cos \frac{\bar{i} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} + y \cos \frac{\bar{j} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} + z \cos \frac{\bar{k} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} \\ z' &= x \cos \frac{\bar{i} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} + y \cos \frac{\bar{j} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} + z \cos \frac{\bar{k} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} \end{aligned}$$

Igy tehát megkapjuk a felületi pontok vagy a felület definiáló támpontok rendszerét. Ehhez azonban biztosítani kell, hogy a metszeteket kijelölő pontok (támpontok v. felületi pontok) száma a különböző metszeten azonos legyen. A felület egyenletét e pontokból (támpontok v. felületi pontok) az előbb leírt módon állítjuk elő.

4.) Forgásfelület megadása alkotóval és forgástengellyel:

Adott egy $\bar{G}(t)$ térgörbe (alkotó) és az $\bar{x} = \bar{a} + v\bar{b}$ egyenes, mint forgástengely. Feladat a felületi pontok, illetve a forgásfelületet kifeszítő támpontok meghatározása. A probléma - tekintve, hogy a tengelyre merőleges metszetek körök - könnyen visszavezethető az előbbi módszerre. Gondot mindössze az jelent, hogy egyenesről lévén szó a fő- és a binormális azonos a null vektorral, tehát ezek helyett más tengelyeket kell kijelölni.

Erre azonban bármely az \bar{x} egyenesre és egymásra is merőleges vektorpár megfelelő.

Első lépésként határozzuk meg a metszetek helyét a forgásten-
gelyen, vagyis számítsuk ki a $\bar{G}(t)$ görbét kijelölő pontok-
nak az $\bar{x} = \bar{a} + v\bar{b}$ egyenesre vett vetületeit. Az így kapott
pontokban kell elhelyezni, az egyenesre merőleges köröket.
A következő lépés ezen körök sugarainak meghatározása. Ennek
ismeretében módunk van a kört a megkívánt pontossággal köze-
lítani, majd az így kapott pontok alapján a térbeli pontokat
kiszámítani.

A metszetek helyvektorát az

$$\bar{m} = \bar{a} + \left[(\bar{G}(t) - \bar{a}) \cdot \frac{\bar{b}}{(b)^2} \right] \bar{b}$$

egyenletet adja, a kör sugara pedig

$$\bar{R} = |\bar{G}(t) - \bar{m}|$$

Mint már említettük szükség lehet a támpontok, illetve a
metszetgörbék transzformálására. A szóba jöhető transzfor-
mációk két csoportra oszlanak:

- lineáris ill. affin transzformációk és
- konform leképezések.

Az előbbiek csak a görbe térbeli helyzetét és esetleg mére-
teit változtatják meg, de a görbe alakját változatlanul
hagyják. Ezek a transzformációk a rendszerbe egyszerűen be-
építhetők.

Kissé bonyolultabb problémát jelent azonban a konform le-
képezések meghatározása. Ezekkel ugyanis valamilyen jól de-
finiált alakváltozást kívánunk elérni pl. egy profilt meg-
hajlítani. Első lépésként e transzformációkat nem tervezzük
beépíteni a rendszerbe, de az ilyen értelmű bővitést lehető-
vé kívánjuk tenni.

5.3 Megjelenítés

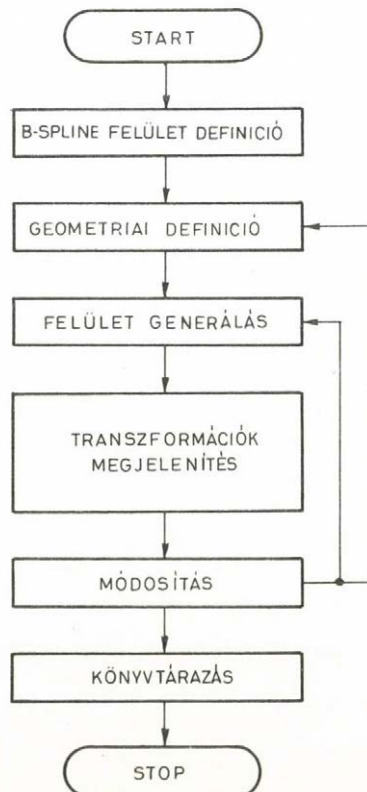
A következőkben ismertetjük az osztályon fejlesztés alatt álló kísérleti felülettervező és megjelenítő rendszert.

A rendszer célja kettős:

- egyrészt tanulmányozni kívánjuk a B-spline felületek előállításának, módosításának és megjelenítésének problémáját;
- másrészt egy eszközt kívánunk biztosítani a kísérleti megmunkáló-rendszer részére, mellyel B-spline felületek definiálhatók.

Az interaktív technika biztosítja a B-spline felületek (pontosabban azok tartópontjainak) egyszerű és rugalmas módosítását.

A program működését a következő blokkdiagram szemlélteti. (39. ábra)



39. ábra.

Kiindulásunk egy $N \times M$ -es mátrix, melynek minden eleme egy számhármass. Minden számhármass egy térbeli B-spline tartópont koordinátáit tartalmazza.

A "B-spline felület definíciója" modulban kétféleképpen állíthatjuk elő a tartópont-mátrixot.

- a.) Megadjuk valamely előzőleg előállított és könyvtározott tartópont-mátrix nevét.
- b.) Beállítjuk az N és M értékeket, így egy kiindulási tartópontháló keletkezik a $z = 1$ síkban.

A későbbiekben megjelenítendő kép geometriai paramétereit a "Geometriai definíció"-ban adjuk meg. Ezek a következők:

- nézőpont koordináták
- a leképzés típusa: orthogonális projekció
perspektív projekció
- a megjelenítés módja: egyszerű
takartvonalas
- a paraméterháló osztási sűrűsége stb.

A tartópontháló - harmadfoku B-spline interpolációt alkalmazva - egyértelműen definiál egy felületet. A felületre a paramétersíkban - az osztási sűrűségnek megfelelően - négyzethálót feszítünk és ezt jelenítjük meg. A szükséges pontokat a "Felületgeneráló" modul állítja elő.

A "Transzformációk - megjelenítés" modulban - az előzőleg beállított geometriai paraméterek alapján - a felület pontjait a képsíkra vetítjük (nézőponttranszformáció, perspektív transzformáció), majd a grafikus displayen egymás mellett megjelenítjük a tartóponthálót és a felületet. Ha a felhasználó úgy kívánja, takartvonalas ábra keletkezik (lásd később). A szemléletesség érdekében megjelenítjük a koordinátatengelyeket is.

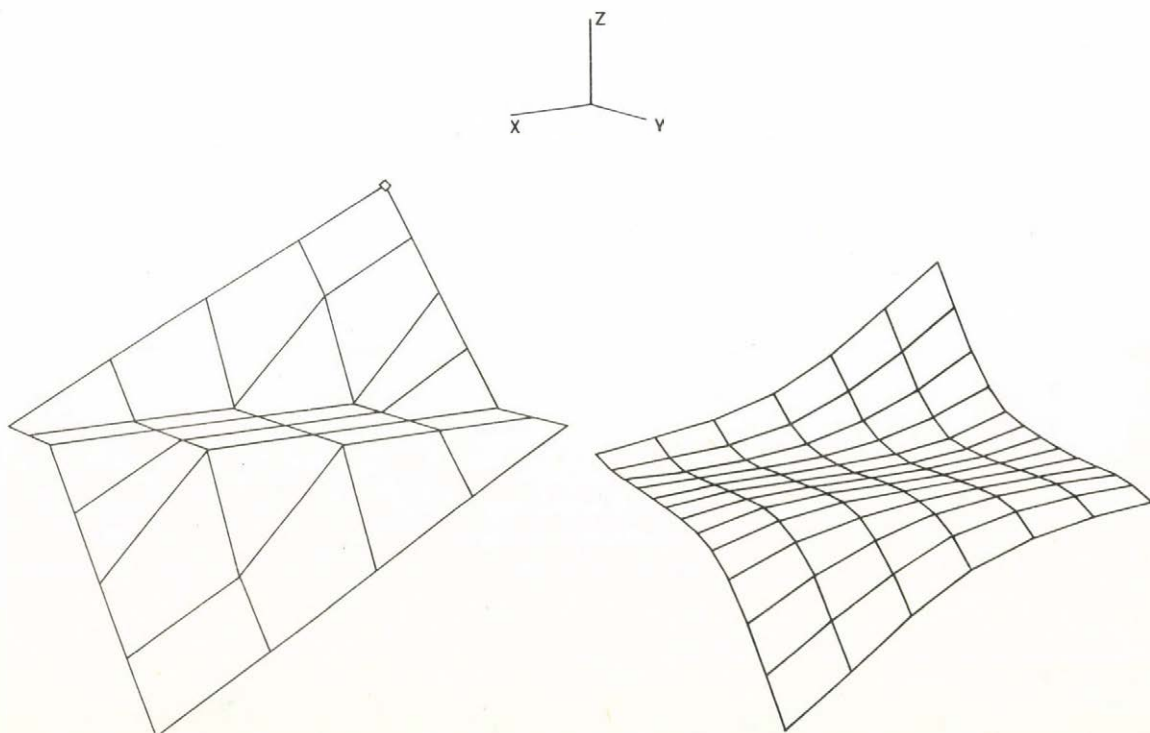
A tartópontok módosítása a következőképpen történik.

A módosítani kívánt tartópontot egy markerrel jelöljük ki, melyet kétféleképpen mozgathatunk:

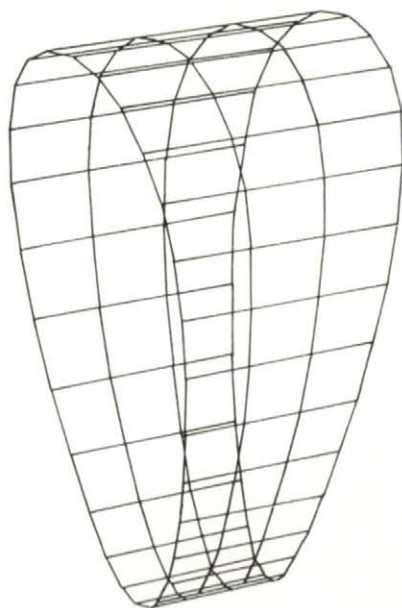
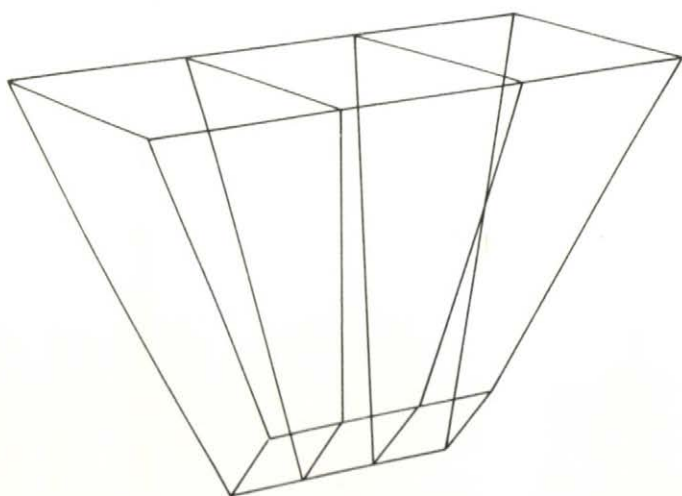
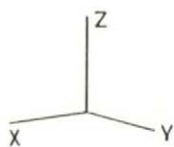
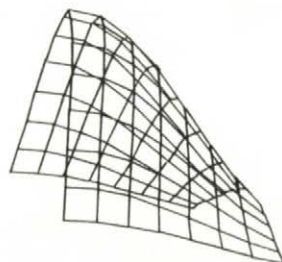
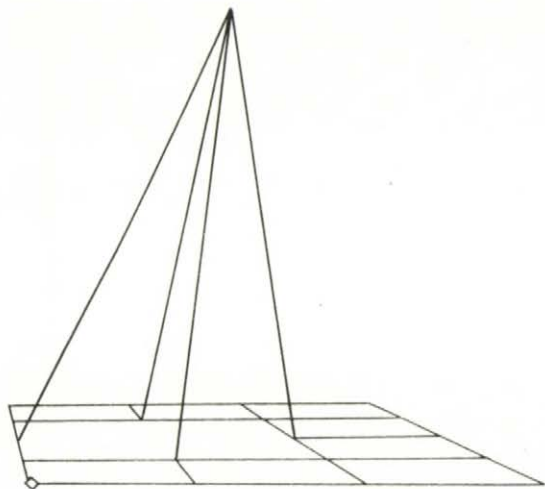
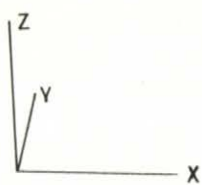
- a.) az alfanumerikus display-en kijelzett koordinátaértékek átírásával,
- b.) pozicionáló gömb segítségével
(a módosítás két fázisban történik, először egy egységvektort forgatunk a megfelelő irányba, majd a pontot ezen irány mentén eltoljuk).

Miután a módosított felület megjelent a grafikus display-en a módosítást tovább folytathatjuk, illetve a meghatározó tartópontmátrixot könyvtározhatjuk.

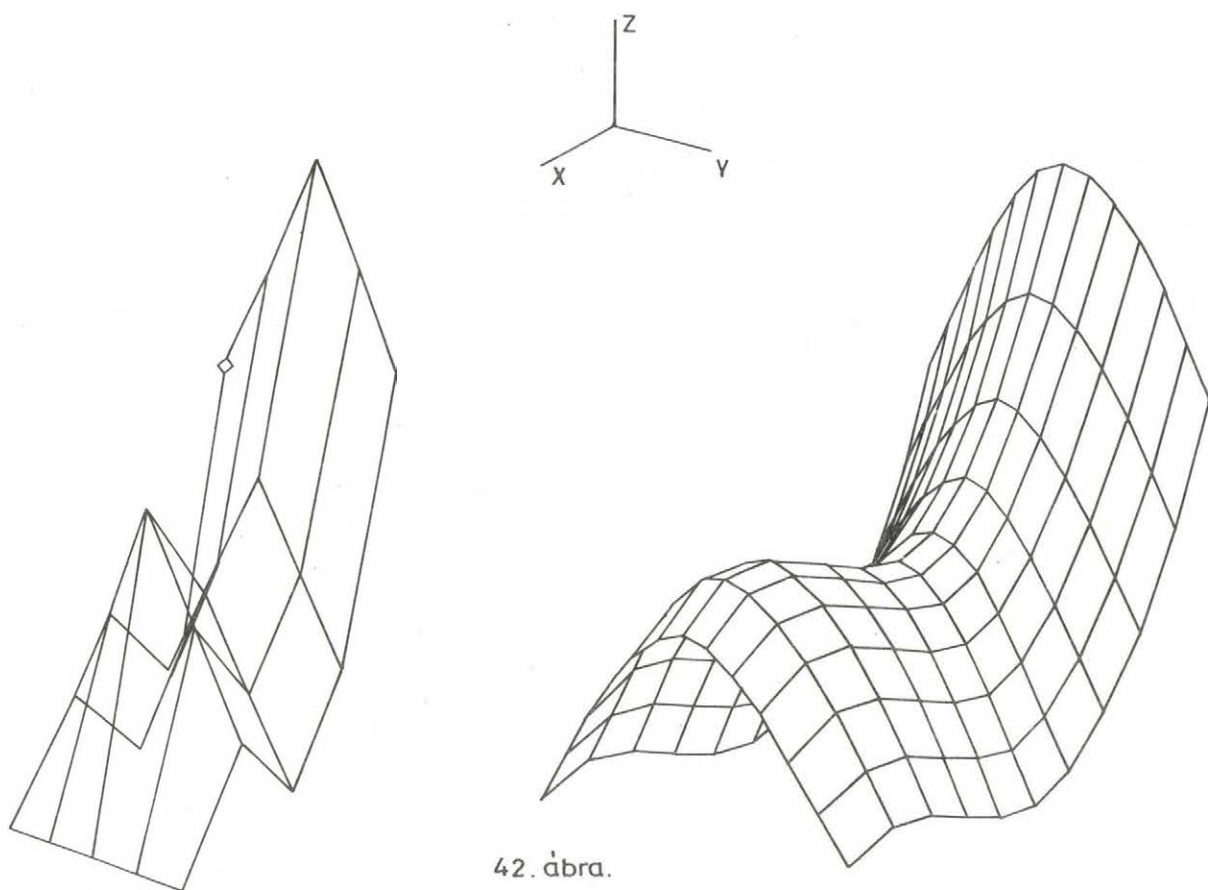
A fentieket szemléltetik a 40-42. ábrák, melyeken a tartópontmátrixot, az általa meghatározott B-spline felület perspektivikus képét, valamint a koordinátatengelyeket láthatjuk.



40. ábra.



41. ábra



42. ábra.

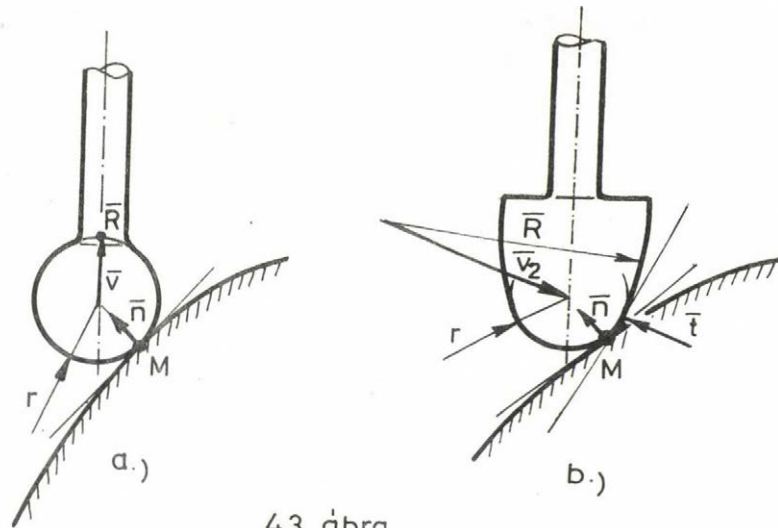
5.4 Geometriai számítások

Geometriai jellegű számítások szükségesek a megmunkálandó felület geometriai és a megmunkálás technológiai tervezésének különböző fázisaiban. Az előzőek alapján a felület leírására a B-spline módszert használjuk. A felület matematikai előállítását és geometriai tulajdonságait a 2. fejezetben tárgyaltuk.

A 2.5. fejezetben foglalkoztunk általánosságban az érintővektorok, a felületi normális, a burkolófelület (ráhagyási alakzat) és a síkmetszet előállításával. B-spline felület használata esetén is az ott megadott összefüggéseket használhatjuk, csupán a felületleíró módszert jellemző \underline{A} mátrix helyébe a B-spline mátrixot: \underline{B} (lásd a (15) összefüggést) kell behelyettesíteni.

A szerszámpálya alatt a szerszám és a munkadarab érintkezési pontjának pályáját értjük. Geometriai szempontból ez lehet a felületen futó paramétervonal, a felület és adott helyzetű sík metszésvonala, vagy előre megadott szabályos felület (pl. henger) és a megmunkáló felület metszésvonala. Mivel a felület leírására harmadfoku függvényeket használunk, már az elsőfoku felülettel, a síkkal való metszésvonal sem állítható elő analitikus formában. Méginkább igaz ez másodfoku felülettel (henger, kup) való metszés esetén. Ezért ezekben az esetekben is a 2.5 fejezetben tárgyalt módszert célszerű használni, amikor a metszetgörbét megfelelő pontossággal pontról-pontra határozzuk meg. A metsző felületet e módszerrel a metszési pontokban kiszámolt érintővektorok és normálisok jellemzik.

Numerikus vezérlésű szerszámgépekkel történő megmunkálásnál a szerszám egy rögzített pontjának, a referenciapontnak a pályáját tudjuk programozni. A referenciapont a szerszám és a felület érintkezési pontjából számolható, egy - az érintkezési pont helyzetétől függő - vektorral való eltolással. A számítás függ a megmunkálás módjától, valamint a szerszám alakjától.



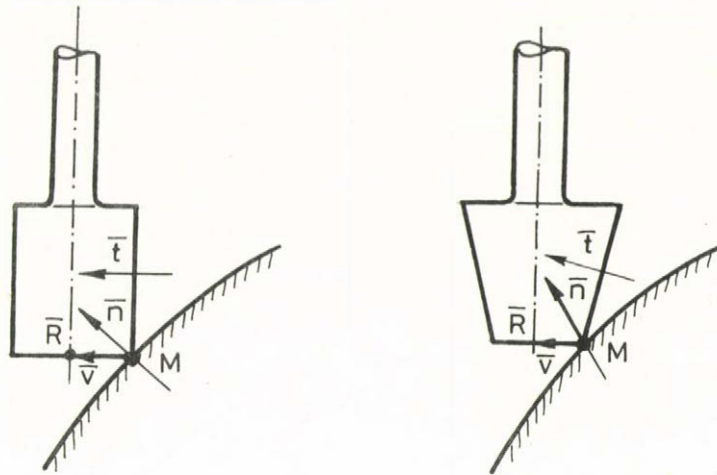
43. ábra.

3D megmunkálásnál a szerszámtengely iránya nem változik a megmunkálás során. Gömb alakú szerszámnál (43/a. ábra) a referenciapont pályája a következőképp adódik.

$$(52) \quad \bar{P}_{\text{ref}} = \bar{F}(u,v) + r\bar{n}_e + \bar{v}$$

ahol \bar{n}_e a felület normális egységvektora az $\bar{F}(u,v)$ érintkezési pontban, r a gömb sugara és \bar{v} a referenciapont eltolódása a gömb középpontjához képest (\bar{v} lehet zérus is).

Gyakran használunk "gömbszerű" szerszámot, melynek tengelymetszete egymást érintő körökből tevődik össze (43/b. ábra). A referenciapályát itt is az (52) képlettel számítjuk, mindig azt a sugarat (r ill. R) és eltolódást (\bar{v}_1, \bar{v}_2) véve figyelembe, amelynek megfelelő felületen folyik a megmunkálás. Ennek meghatározásához a megmunkálandó felület normálisát minden pontban össze kell hasonlítani a két szerszám-felület határát kijelölő \bar{t} iránnyal.

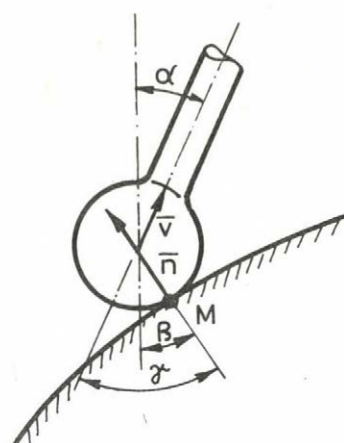


44. ábra.

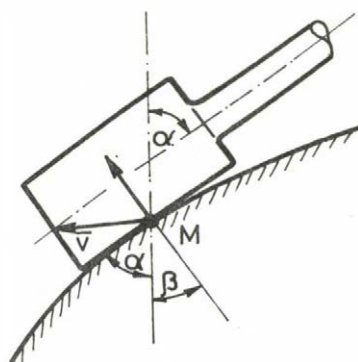
Hengeres és kúpszerszám esetén 3D megmunkálásnál a forgácsolás helye adott (M pont a 44. ábrán), tehát a referencia-pont egyszerű eltolással adódik.

Ha a szerszámalást és a homlokfelület között lekerekítés van, akkor a helyzet hasonló a gömbszerszám esetéhez és az (52) képlet alkalmazható. Ugyanakkor a felületi normálist minden pontban számítani kell, mert ez mutatja meg (a \vec{t} szerszám-felületi normálissal összehasonlítva), hogy egyáltalán mely tartományban lehetséges megmunkálás.

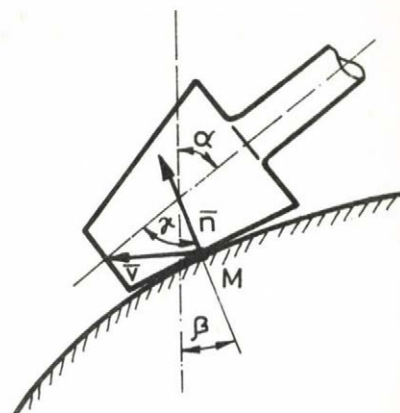
5D megmunkálásnál lehetőségünk van a szerszámfelületen az optimális megmunkálási viszonyokat biztosító pont kiválasztására. Ezt egyrészt a munkadarab oly módon való elforgatásával és eltolásával érhetjük el, hogy normálisa a megmunkálási pontban a szerszámtengely elforgatási síkjába kerüljön, másrészt a szerszámtengelyt az így adódó normális iránynak megfelelően saját síkjában elforgatjuk.



$$\alpha = \gamma - \beta$$



$$\alpha = 90^\circ - \beta$$



$$\alpha = \gamma - \beta$$

45. ábra.

Tekintsük tehát a szerszám elforgatásának síkját, (45. ábrán a rajz síkja). Az M optimális megmunkálási pont helyzetét a szerszámtengelyhez képest a γ szög jellemzi, a normális vektor függőlegessel bezárt szögét pedig β -val jelöljük. Az optimális szerszámhelyzetet a szerszámtengely függőlegessel bezárt szögével (α) jellemezzük, amely az ábrák geometriájából adódóan:

$$\alpha = \gamma - \beta$$

Ezek után a referenciapont térbeli helyzetét úgy kapjuk, hogy a \bar{v} vektort α szöggel elforgatjuk. Az (52) képlet felhasználásával gömb alakú szerszámnál:

$$\bar{P}_{\text{ref}} = \bar{F}(u, v) + r\bar{n}_e + (v_x \cos \alpha - v_y \sin \alpha)\bar{i} + (v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha)\bar{j}$$

hengeres és kupalaku szerszámnál pedig:

$$\bar{P}_{\text{ref}} = \bar{F}(u, v) + (v_x \cos \alpha - v_y \sin \alpha)\bar{i} + (v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha)\bar{j}$$

A \bar{v} vektor e képletekben az optimális megmunkálási pont és a referenciapont vektor-eltolódását jelenti függőleges tengelyállás esetén.

5.5 Technológia tervezés

A munkadarab megmunkálási folyamatát a technológia tervező alrendszer határozza meg. A tervezéshez szükséges kiinduló (bemenő) adatok egyrészt a munkadarab geometriai adatai, anyaga, pontossága, felületi simasága, másrészt a megmunkáláshoz felhasználható szerszámok, szerszámgépek megfelelő adatai. A szükséges adatok száma igen nagy, ezért tárolásukat adatbázisban kell megoldani.

A 4. fejezetben tárgyalt vizsgálatok alapján a továbbiakban ismertetjük a technológiai tervező alrendszer egy lehetséges felépítését. A rendszerterv kidolgozásánál külön figyelmet fordítottunk a programrendszer moduláris felépítésére és a továbbfejlesztési lehetőségek meghatározására. A továbbiakban ezeket a modulokat ismertetjük.

a.) Pontossági vizsgálat

A tervező modulok lényeges adata a szükséges pontosság, ezért a tervezés első lépéseként a munkadarabon rendelkezésre álló tűrés-értéket fel kell osztani a pontatlanságok lehetséges forrásai között. A pontosságot befolyásoló tényezők két csoportba sorolhatók:

- a tervezőrendszer által nem befolyásolható pontatlanságok
- tervezhető méreteltérések.

A modul feladata, hogy az első csoportba tartozó tényezők értékének figyelembevételével a türeSBől megmaradó részt a tervezhető méreteltérések között felossza.

A modul fejlesztése e két csoportnál különböző feladatokat kíván meg. A rendszertől független pontatlanságok nagyságát

- determinisztikus, vagy
- sztochasztikus modellekkel határozhatjuk meg.

A determinisztikus modellek az egyes folyamatok valamilyen közelítését adják. A folyamatok alaposabb vizsgálatával a modellek közelítése javítható, illetőleg lehetővé válik a folyamatoksztochasztikus modelljének meghatározása. A folyamatok valószínűségi alapon történő kezelése pedig a valóságot jobban megközelítő, pontosabb számítás teszt lehetővé.

A türeS megmaradó részének a tervezhető méreteltérések közötti felosztása alapvetően kétféle módon mehet végbe:

- a türeS egyszerű felosztása
- optimalizáló felosztás

Az első megoldás szerint a rendelkezésre álló türeS értékét valamilyen előre meghatározott arányok alapján osztják fel. Ezt elvégezheti valamilyen algoritmus alapján a számítógép, de a rendszer kezdeti szakaszában a technológus is. Az optimalizálás esetében a program figyelembe veszt a pontosságot befolyásoló tényezők hatását a tervezés és megmunkálás folyamatára, és a türeS értékét úgy osztja fel, hogy valamilyen optimum feltélt (minimális költség, számítógépidő, szerszámgépidő stb.) a lehető legjobban kielégítsen.

A türeS felosztásakor figyelembe kell venni a tervezés és a megmunkálás egyes fázisainak minimális türeS igényét, amely szűk türeSok esetén különleges gyártási körülmények biztosítását igényelheti, illetve az alkatrész elutasításához vezethet.

b.) Ráhagyási alakzat előállítása

A megmunkálás műveleteinek tervezésekor a rendszer geometriai modellként a mindenkorí ráhagyási alakzatot veszi figyelembe. A ráhagyási alakzat az utolsó műveletnél a munkadarab felülete, az azt megelőző műveleteknél pedig az eredeti felület burkolófelülete. A burkolófelület a munkadarab felüeltével lehet

- egyenközű, vagy
- nem egyenközű.

Az utóbbi típusu felület számítása az egyenközűnél valamivel bonyolultabb, de mivel a ráhagyás nagyságát a felület egyes pontjaiban a szerszám forgácsolóképesége határoolja be és ez pontról pontra változhat, a nem egyenközű ráhagyási alakzattal hatékonyabb technológia érhető el. Az egymásra következő ráhagyási alakzatokat a megmunkálással ellentétes sorrendben állítjuk elő. A számítás alapjául a következő művelet ráhagyási alakzata és az alkalmazott szerszámok forgácsolóképesége szolgál.

A megmunkálás tervezéséhez a geometrián kívül szükség van a megmunkálási tűrésre, azaz a munkadarab felületének a megmunkálás folyamán megengedett méreteltérésére is. Ha ez az egész felületen állandó, akkor megadhatjuk egy számértékkel, egyébként a tűrés nagyságához hozzá kell rendelni azt a felületelemet is, amire az érvényes.

c.) Stratégia meghatározása

A szerszámmozgás tervezésének első lépéseként a szerszám pályák típusát kell meghatározni. A ráhagyási alakzat geometriája, tűrése és a még eltávolítandó anyag mennyiség alapján dönteni kell a mozgásstratégia típusáról (cikcak vagy konturkövető), majd ezen belül a mozgáspálya típusáról is. A stratégia meghatározásakor a konkrét tervező, -és megmunkálórendszer lehetőségeit

kell figyelembe venni. Ha a munkadarab felülete olyan, hogy a megmunkálást az egyes felületelemeken különféle stratégiával célszerű végrehajtani, akkor az egyes stratégiák típusának meghatározásán kívül ki kell jelölni a felületen azok érvényességi határát és a megmunkálás sorrendjét is.

A programmodul megvalósításának lehetőségei:

- a stratégiákat a technológus megadja
- a stratégiák meghatározása grafikus display-jel segített interaktív tervezéssel történik
- a stratégiák meghatározása teljesen számítógéppel történik.

A stratégiák meghatározása nem korlátozódhat egy művelet, egy ráhagyási alakzat szintjére. Előfordulhat egyes esetekben (nagyolás-simitás, cikcak-konturkövető stratégiák közötti váltás stb.), hogy két egymás után elhelyezkedő stratégia nem illeszthető hatékonyan egymáshoz. Ebben az esetben olyan közbenső megmunkálást kell beiktatni, amely a tervezendő stratégia szempontjából kedvezőbbé teszi a ráhagyási alakzat geometriáját vagy a tűrés értékét. Mivel a megmunkálás műveleteinek tervezési sorrendje a végrehajtásával ellenkező, így a közbenső megmunkálások tervezésének sorrendje az általános sorrenddel ellentétes lesz.

Hasonló a helyzet hagyományos technológiák beillesztésénél is. Egyes esetekben, például süllyesztékek megmunkálásakor a marószerszámok tengelyirányú rossz forgácsoló-képessége miatt szinte szükségszerű a hagyományos megmunkálás furás, felfurás alkalmazása. Az előnagyoló stratégia tervezésekor a programmodulnak "észre kell vennie" a hagyományos megmunkálás beépítésének szükségességét és ennek megfelelően módosítani kell a munkadarab előgyártmány geometriáját.

d.) Szerszámválasztás előkészítése

A szerszámválasztás előkészítésének feladata az egyes felületelemeken alkalmazható marószerszámok lehetséges méretének és a felület mentén a normális irány változási tartományának meghatározása. Ezeknek a tényezőknek (függvényeknek) meghatározásához szükséges geometriai vizsgálatot egyszerre csak az egy stratégiához tartozó felületelemen kell végrehajtani.

A programmodul megvalósításának lehetőségei:

- ha a technológus adja meg a szerszámokat, akkor erre a modulra nincs szükség
- grafikus display-jel segített interaktív tervezés
- teljesen számítógépes tervezés

A stratégia meghatározásánál és ennél a programmodulnál is a megvalósítás lehetőségei között szerepel a tervezési feladat teljesen számítógépes megoldása. Ez a módszer csak a tervezés automatizálása szempontjából tekinthető a legfejlettebbnek, mert a megfelelő színvonalu eredmény már interaktív tervezési módszerrel is biztosítható. Mivel a tervezés e két feladatának számítógépes megoldásakor a számítógépidő szükséglet az interaktív tervezéshez képest valószínűleg jelentősen megnő, ezért ezek a fejlesztések csak akkor javasolhatók, ha a rendszer egyébként már teljesen automatizált.

e.) Szerszámválasztás

A tervezőmodul feladata, hogy a vizsgált stratégiához tartozó felületelem megmunkálásához az előző modul által meghatározott korlátozások figyelembevételével olyan szerszám típusokat válasszon, amelyekkel a lehető leghatékonyabb megmunkálás érhető el.

A rendelkezésre álló szerszámtípusok közül - amelyek adatait az adatbázis tartalmazza - a szerszámválasztást előkészítő modul által előállított korlátfüggvényekkel határolható be az alkalmazható szerszámtípusok köre. Ha a korlátozások a felület mentén változnak, akkor a felület mentén változnak az alkalmazható szerszámok is. Az alkalmazható szerszámtípusok felhasználásával olyan forgácsolási tervet kell meghatározni, amely minimális szerszámváltással hatékony technológiát biztosít.

A programmodul megvalósításának lehetőségei:

- a technológus megadja az alkalmazandó szerszámokat
- az alkalmazott szerszámok meghatározása grafikus display-jel segített interaktív tervezéssel történik.
- a feladat megoldása számítógépes optimalizálással történik.

Amennyiben egy felületen azonos stratégiával, de két- vagy többféle szerszámtípussal történik a megmunkálás, akkor a programmodul kimeneteként az egyes szerszámtípusok mellett az általuk megmunkált felületelem is jelentkezik. Meg kell adni ezen felületelemek kapcsolódásának határait, a megmunkálás sorrendjét és azt, hogy a mozgáspályák számítása a határvonalon (illetve annak közvetlen közelében) milyen feltételek mellett történjen (a határvonal melyik szerszámtípushoz tartozik, mi a teendő ha a mozgáspálya közvetlenül a határvonal mellé jön ki stb.).

f.) Érintkezési pont pályájának számítása

Az érintkezési pont pályája alatt a marószerszám és a felület érintkezési pontjának a felületen leírt pályáját értjük. A pálya alakját (illetve az előállítás módját) a mozgáspálya típusa határozza meg. A programmodul feladata, hogy meghatározza a szomszédos mozgáspályák távolságát a felületen, az egyes mozgáspályák hosszát, vala-

mint a megfelelő geometriai számítórutinok segítségével megfelelő pontossággal és pontsűrűséggel kiszámítsa az egyes mozgáspályák pontjait, az egyes pontokhoz tartozó felületi normális irányát és a görbületet.

A mozgáspályák hosszának és a szomszédos pályák felületi távolságának meghatározására a megengedett hullámosodás betartása miatt van szükség. A feladat megoldásának lehetőségei különböznek attól függően, hogy a megmunkálás milyen pályákkal van felépítve:

- teljes mozgáspályákkal;

Itt az egy szerszám által megmunkált felületelemen a mozgáspályák távolságát a két pálya között valahol előforduló minimális távolság szabja meg.

- tört pályaszakaszokból felépítve;

Itt az egy szerszám által megmunkált felületelemen teljes hosszúságu és tört pályaszakaszok is vannak. A pályaszakaszok hosszát és távolságát a pályák teljes hosszának minimalizálása érdekében optimalizálással kell meghatározni.

Mindkét megoldás végrehajtása számítógéppel történik, de az utóbbival - bár a számítás bonyolultabb - a megmunkálás hatékonysága általában lényegesen növelhető. A mozgáspálya pontjainak és a felületi normális irányának számítási pontosságát, illetve a pontok sűrűségét a pontossági vizsgálatnál meghatározott megfelelő tényezők értékével állíthatjuk be.

g.) Technológiai adatok számítása

A modul feladata a szerszámmozgás geometriáján kívül minden - a megmunkálással kapcsolatos - számítás elvégzése.

A számítás számítógéppel történik, a vizsgált folyamatot valamilyen módon közelítő matematikai modell alapján.

A modul által számítandó adatok:

- előtolás
- fordulatszám
- szerszámkopás
- a megmunkálási hibák, deformációk korrekciói, szerszámelrendezési terv stb.

A megmunkáláshoz az első három adat meghatározása feltétlenül szükséges. Ennek első lépéseként az előtolás és a fordulatszám értékét behatároló korlátfüggvényeket kell felállítani. E függvények által meghatározott tartományba eső megvalósítható előtolás és fordulatszám értékek közül a ténylegesen alkalmazott értékeket valamilyen kiválasztási szabály, vagy optimalizáló célfüggvények alapján lehet kiválasztani. A forgácsolási körülmények a megmunkálás során jelentősen változhatnak, ezért ezt a számítást egy mozgáspálya mentén többször is el kell végezni.

A szerszámkopás meghatározása a szerszámcsere ütemezéséhez és a kopásból eredő méretváltozás korrigálásához szükséges. A forgácsolási körülmények jelentős változása igen megnehezíti a szerszámkopás számítását. Első lépésként elegendő a szerszámkopás egy közelítő becslése is. Ez ugyan a kopás korrigálásához nem felel meg, de a szerszámcsere ütemezését lehetővé teszi. A különböző kopásból, deformációkból eredő hibák korrigálása általában csak igen pontos munkadarabok gyártásánál szükséges.

A modul képességeinek fejlesztése a matematikai modellek fejlesztésével történik. A korrekciókat számító modellek fejlettségi szintjét össze kell hangolni a pontossági számításokéval, mivel nehézséget okozhat például egy statisztikus számítóeljárásba beilleszteni egy determinisztikus matematikai modell eredményét.

h.) Mozgáspálya meghatározása

A modul feladata a tényleges szerszámmozgás megtervezése.

A szerszámmozgás két típusra osztható:

- forgácsoló főmozgás
- mellékmozgás

A főmozgás pályája a szerszámtípussal, az érintkezési pont pályájával és a felületi normálissal egyértelműen meghatározott, mindössze a szerszám gép által vezérelhető pontra, az u.n. referencia pontra kell átszámítani. Ez, és az esetleges korrekciók számítógéppel egyszerűen megoldhatók.

A mellékmozgásoknál a szerszámmozgás kezdő- és végpontja ismert. A tervezés elsődleges célja, hogy a mellékmozgások a lehető legrövidebb ideig tartsanak.

A mellékmozgások tervezésének lehetséges változatai:

- interaktív tervezés grafikus display segítségével
- számítógépes tervezés

A mellékmozgások tervezésekor ügyelni kell arra, hogy a szerszám gyorsjáratú mozgása egy görbevonalu pálya mentén jelentős hullámzásokkal járhat, illetve a gyorsjárat véghelyzetének méreteltérése - ha kuszómenet nincs programozva - több milliméter lehet.

i.) Rendszer kimenet

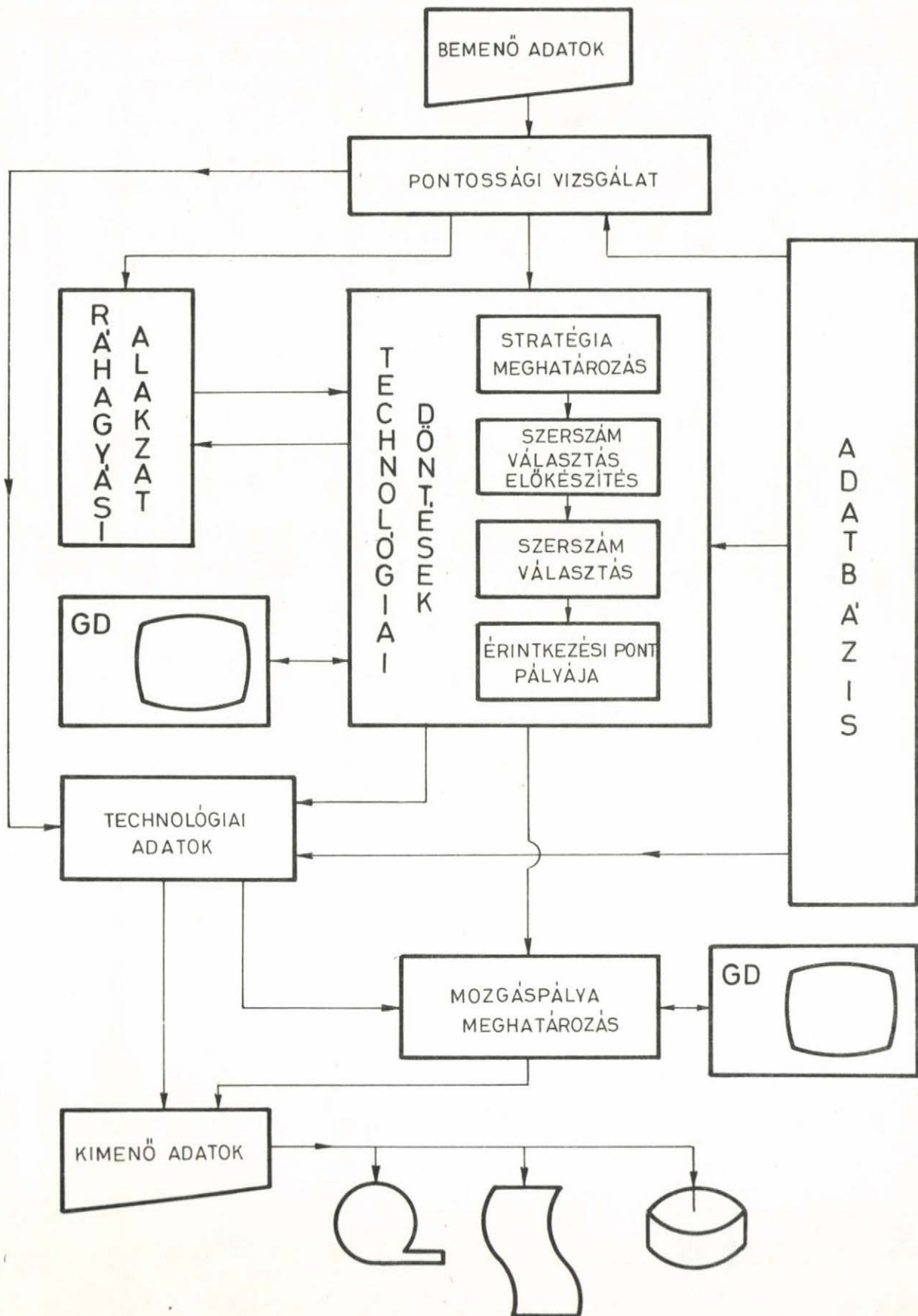
A mozgáspálya meghatározásával befejeződik a megmunkálás tervezése. A technológia felhasználásához a számítógép memóriájában őrzött adathalmazból az NC marógép számára érthető formátumu alkatrészprogramot kell előállítani. Ez a feladat azonban nem egyértelmű. A modul bemenete ugyan meghatározott, hiszen az adatok elhelyezkedése a memóriában ismert, de a megkívánt alkatrészprogram for-

mátum a gyakorlatban alkalmazott különböző vezérlések, illetve vezérlőnyelvek miatt többféle is lehet. A rendszer nem igazodhat valamennyi lehetséges felhasználó igényéhez, ezért egyelőre a rendszerkimenet egy szabványos formátumban (pl. CLDATA nyelv) készül el.

Ebben az esetben a felhasználók gondoskodnak a saját igényeiknek megfelelő vezérlő formátum előállításáról. Rendszerkimeneti modulként a későbbiekben általános posztprocesszor is alkalmazható, ami egyszerűen lehetővé teszi a felhasználói igényeknek megfelelő vezérlőformátum előállítását.

A technológia tervező alrendszer működésének a fentiek alapján összeállított logikai vázlatát a 46. ábra mutatja (az ábrán használt GD jelölés grafikus display alkalmazására utal). A rendszer konkrét működése természetesen nem az ábra alapján történik, hiszen a moduláris felépítés miatt az egyes programmodulok között közvetlen információátadás nem lesz, viszont a helyes programlefutás vezérléséhez szükség van egy, az ábrán nem jelölt vezérprogramra is.

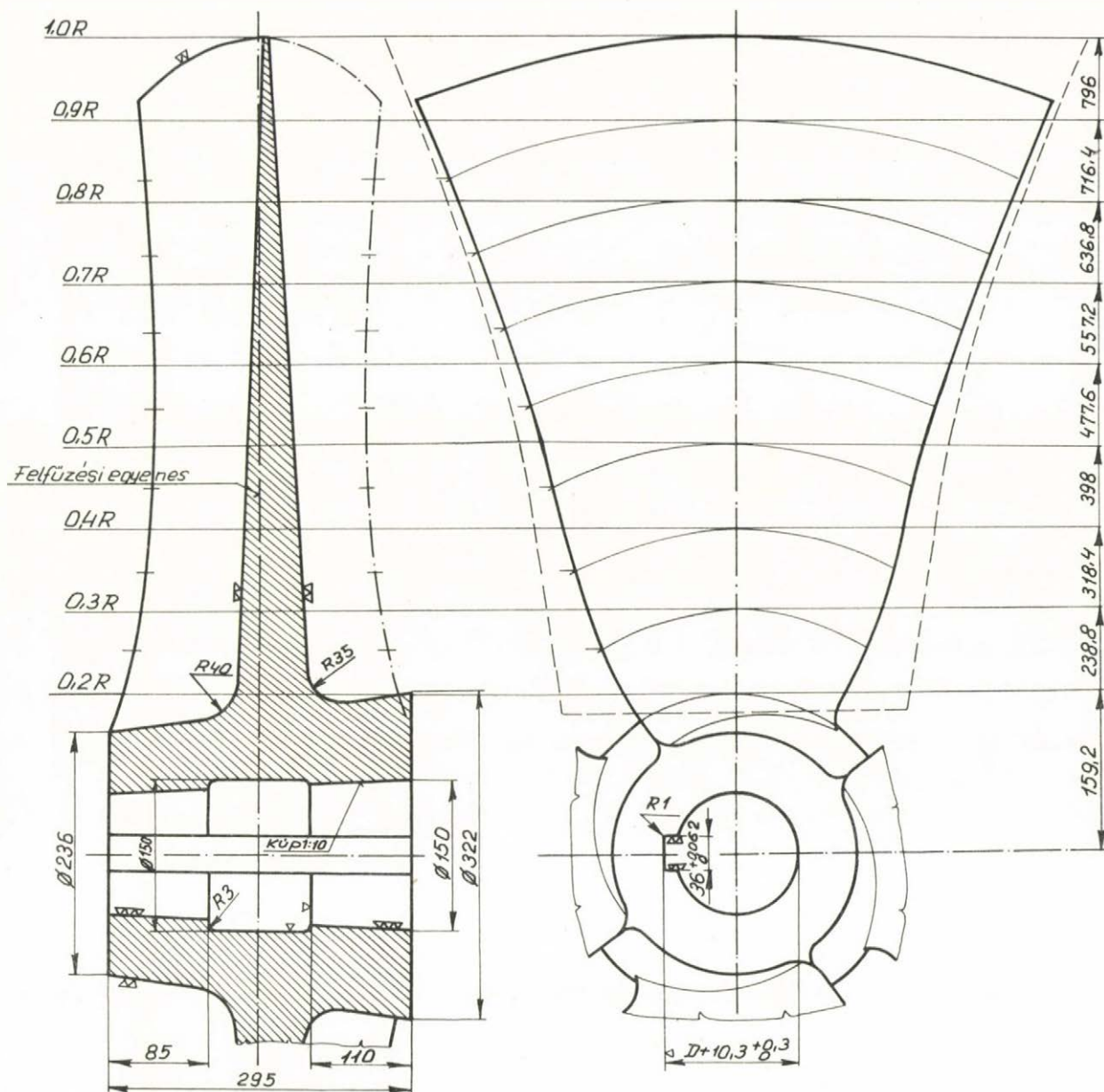
A technológiai tervező alrendszer fentiekben ismertetett felépítése, működése elméleti megfontolásokon alapuló rendszerterv elképzelés. Ezen rendszerterv célja, hogy a tervezőrendszer létrehozásakor segítse az egész rendszer áttekintését, a rendszer szimmetrikus fejlesztését és alapul szolgáljon az egyes modulok csatlakozó felületeinek és konkrét felépítésének meghatározásához.



46. ábra.

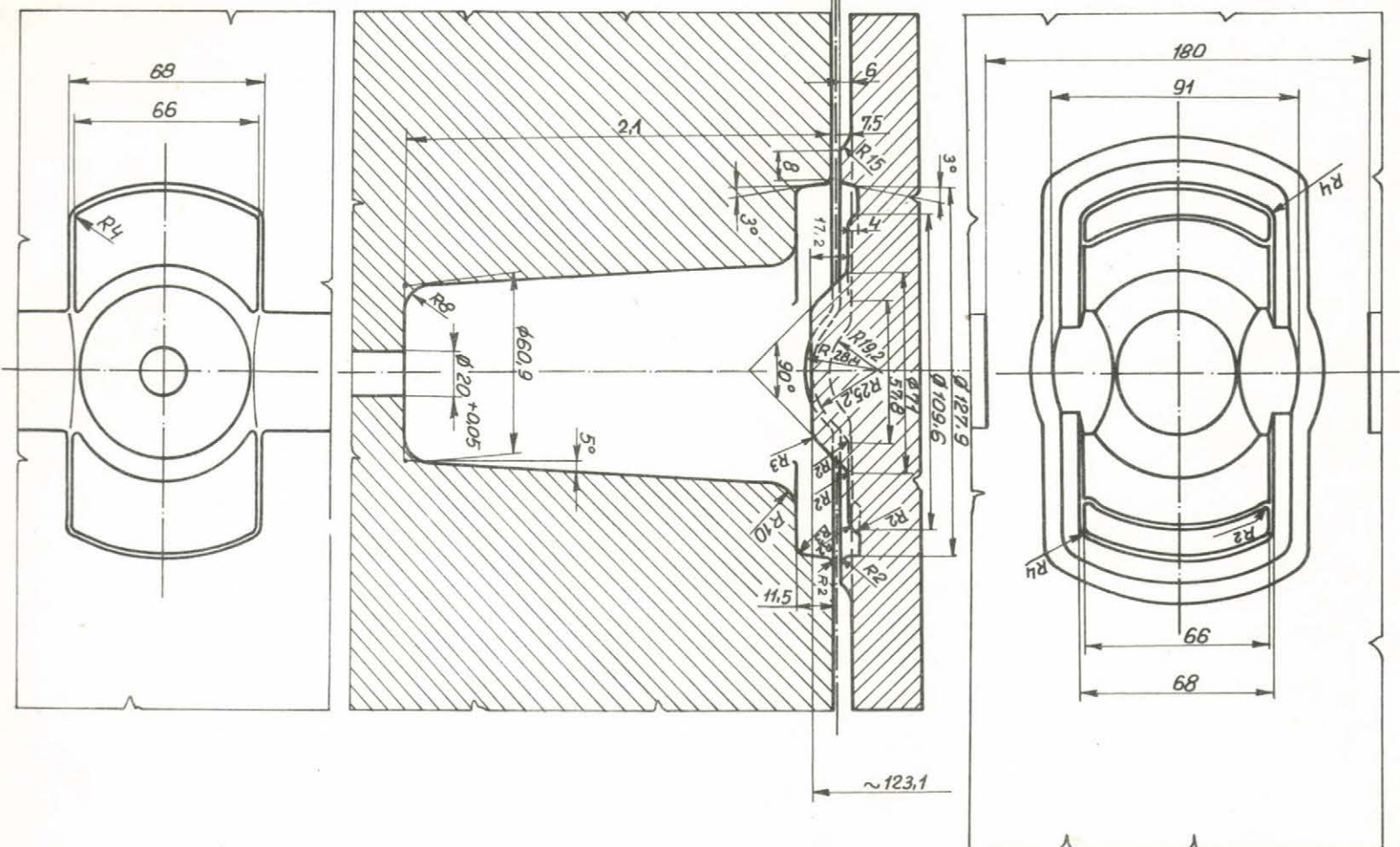
MELLÉKLETEK

1/a. melléklet



HAJÓCSAVAR

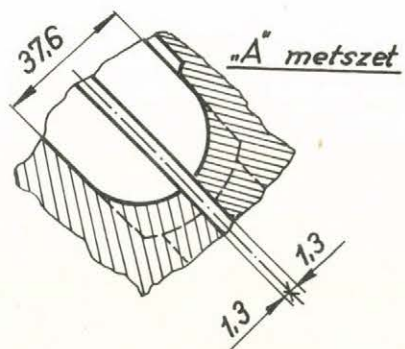
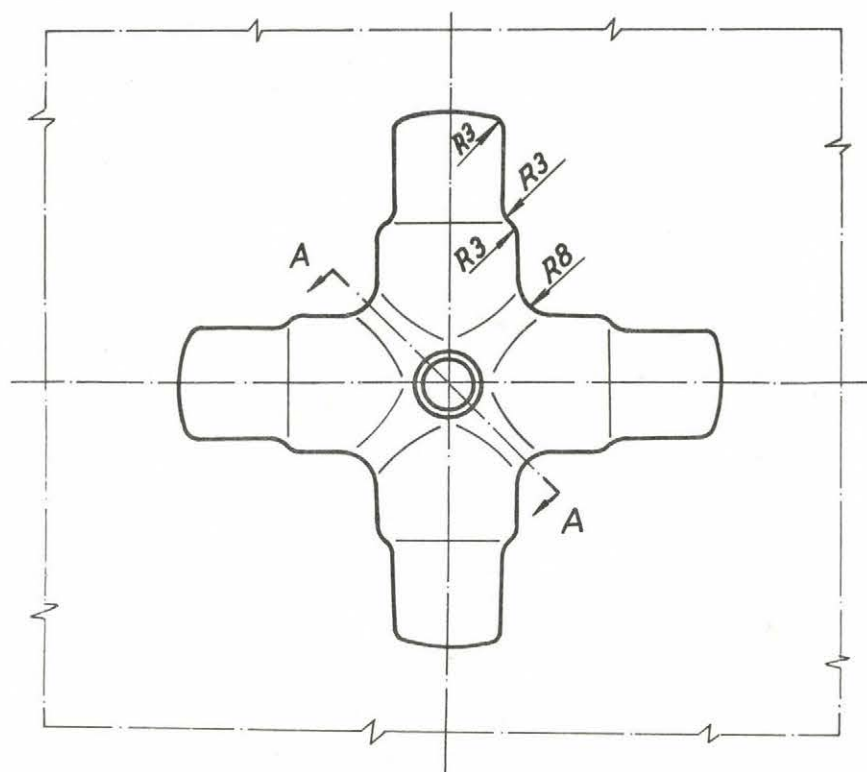
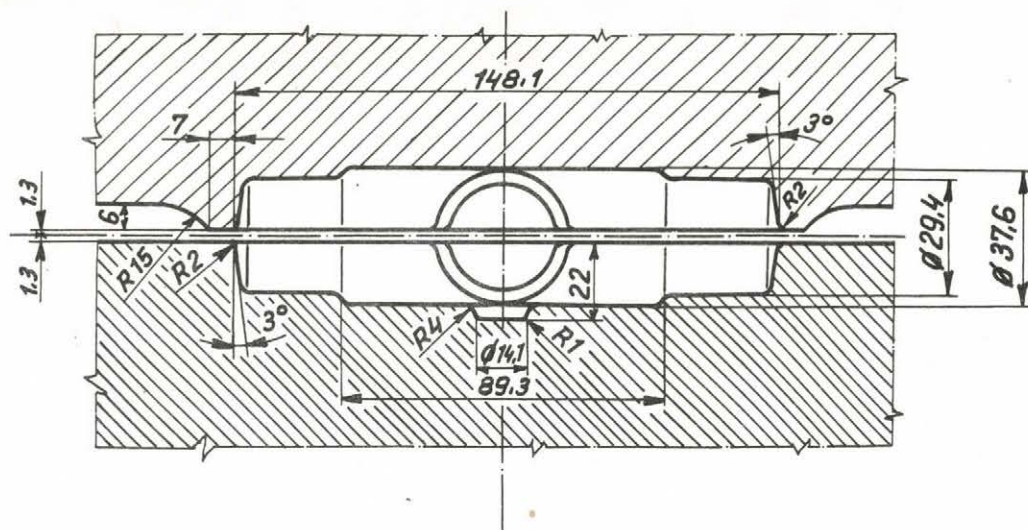
M=1:5

$$283,4 \pm 0,15 \quad 3,2 \quad 113,4 \pm 0,15$$


Hornysperem

 $M = 1:2$

3. melléklet



SÜLLYESZTÉK
Tengelykereszt

$$M = 1:2$$

